HX4 — Contrôle 1994/02

Exercice 1

Q1 Question de cours : établissez la convergence de la suite de réels $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $S_n = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} k^{-2}$. Notant ℓ sa limite, prouvez que $\frac{5}{4} < \ell \leqslant 2$.

Exercice 2

Q1 Étudiez l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arccos\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{2}} - \arcsin\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ et tracez sa courbe représentative.

Q2 Calculez $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\,dt$.

Exercice 3

► Pour $n \geqslant 1$, notons $s_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = \dfrac{s_n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = s_n - 2\sqrt{n}$.

Q1 Pour $n \geqslant 1$, prouvez l'inégalité $s_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$. Pour quelle(s) valeur(s) de n a-t-on l'égalité ?

Q2 Prouvez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. *Remarque* : il existe au moins deux méthodes différentes.

Q3 En déduire la convergence de cette suite.

Q4 Établissez l'inégalité $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant s_n$ pour $n \geqslant 1$. *Remarque* : il existe au moins deux méthodes différentes.

Q5 Prouvez que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, puis qu'elle converge.

Q6 Exhibez une suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ de réels telle que $\dfrac{s_n}{w_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, l'expression du terme général w_n étant *très simple*.

Tournez S.V.P.

Exercice 4

► Nous nous proposons de décrire une méthode pour évaluer $\arctan x$, avec x réel quelconque.

Q1 Montrez qu'il suffit de savoir traiter le cas $0 < x < 1$.

Q2 Nous disposons d'une fonction Pascal d'en-tête :

```
function petitarctan(x:real):real);
```

qui évalue $\arctan x$ pour $0 < x < 1$. Rédigez une fonction d'en-tête :

```
function arctan(x:real):real);
```

qui évalue $\arctan x$ pour x quelconque.

► Nous examinons maintenant le cas où x est un réel « petit ».

Q3 Établissez la formule :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2}\,dt$$

Q4 Notons $\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3}$. Prouvez l'inégalité $\left|\arctan(x) - \varphi(x)\right| \leqslant 6 \cdot 10^{-9}$ pour tout x vérifiant $|x| \leqslant 2^{-5}$.

► Dans la suite, x désigne un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1[$.

Q5 Montrez qu'il existe un et un seul relatif k tel que, notant $x' = \frac{2k+1}{32}$, on ait $-\frac{1}{32} \leqslant x - x' < \frac{1}{32}$. Vous expliciterez k en fonction de x, au moyen de la fonction « partie entière ».

Q6 Notons $u = \frac{x-x'}{1+xx'}$ et $a_k = \arctan\left(\dfrac{2k+1}{32}\right)$. Prouvez la relation $\arctan(x) = a_k + \arctan(u)$. Donnez un majorant de l'erreur commise lorsque l'on approche $\arctan(x)$ par $a_k + \varphi(u)$.

Q7 Supposons connues les valeurs des a_k pour $k \in [\![0,15]\!]$, avec une précision de 10^{-9} ; nous effectuons la déclaration :

```
var a:array[0..15] of real;
```

et, par un procédé que nous ne décrirons pas ici en détail, nous avons fait en sorte que la valeur de `a[k]` soit a_k pour tout $k \in [\![0,15]\!]$. Rédigez le corps de la fonction `petitarctan`, pour que celle-ci évalue $\arctan(x)$ avec une précision de 10^{-8}.