

La solution de chaque question ne requiert jamais plus d'une douzaine de lignes manuscrites.

### Partie I : une définition des polynômes d'Hermite

► Notons  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(-x^2)$ . Nous identifions le polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  et la fonction polynôme  $\tilde{P}$  associée.

- Q1 Montrez que  $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ , où  $P_n$  est un polynôme dont vous préciserez le degré, la parité et le coefficient dominant.
- Q2 Que pouvez-vous dire, respectivement, des familles  $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$  et  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
- Q3 Explicitez  $P_n$  pour  $n \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$ .
- Q4 Constatez que  $f$  vérifie une équation différentielle très simple. En utilisant la formule de LEIBNIZ, établissez une relation entre  $P_n$ ,  $P_{n+1}$  et  $P_{n+2}$ .
- Q5 Calculez  $P_n(0)$ .
- Q6 Montrez que, pour  $n \geq 1$ , le polynôme  $P_n$  possède  $n$  racines réelles distinctes, qui séparent celles de  $P_{n+1}$ .
- Q7 Établissez une relation entre  $P'_{n+1}$  et  $P_n$ , puis montrez que  $P_n$  vérifie une équation différentielle du second ordre.
- Q8 Établissez  $P_n^{(k)} = (-2)^k \frac{n!}{(n-k)!} P_{n-k}$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
- Q9 Compte tenu de la parité de  $P_n$ , nous pouvons écrire  $P_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} a_{n,k} X^{n-2k}$ . Explicitez  $a_{n,k}$ .

### Partie II : construction d'une structure euclidienne

► Quelques rappels :

- $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- si  $\int_0^{+\infty} |\varphi(t)| dt$  converge, alors  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$  converge également
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$  est réputée convergente ssi chacune des intégrales  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$  et  $\int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt$  converge

► Notons  $\mathcal{L}$  l'ensemble des  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) \exp(-t^2) dt$  converge.

- Q10 Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathcal{L}$ . Montrez que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) \exp(-t^2) dt$  converge.
- Q11 En déduire que  $\mathcal{L}$  est un s.e.v. de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- Q12 Soit  $P$  un élément de  $\mathbb{R}[X]$ . Établissez la convergence de  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \exp(-t^2) dt$ . En déduire que  $P$  appartient à  $\mathcal{L}$ .
- Q13 Montrez que l'on définit un produit scalaire sur  $\mathcal{L}$  en posant  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) \exp(-t^2) dt$ .
- Q14 Pour  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , établissez  $\langle Q, P_{n+1} \rangle = -\langle Q', P_n \rangle$ .
- Q15 En déduire la valeur de  $\langle P_n, P_m \rangle$  lorsque  $n \neq m$ , puis celle de  $\langle P_n, P_n \rangle$ .
- Q16 Notons désormais  $\|P\| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$  pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Soit  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  de coefficient dominant  $(-2)^n$ . Montrez que  $\|P_n\| \leq \|Q\|$ .

Tournez S.V.P.

### Partie III : étude du projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_n[X]$

- Q17 Soit  $g \in \mathcal{L}$ . Explicitiez la projection orthogonale  $g_n$  de  $g$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Q18 Soit  $g \in \mathcal{L}$ . Montrez que la série de terme général  $u_n = \frac{\langle g, P_n \rangle^2}{\langle P_n, P_n \rangle}$  converge, et donnez un majorant de sa somme.
- Q19 Dans le cas où  $g$  est un élément de  $\mathbb{R}[X]$ , que pensez-vous de la série précédente ?
- Q20 Calculez  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \exp(-t^2) dt$  en fonction de  $n$ .
- Q21 Soient  $n$  et  $k$  deux naturels. Calculez  $\langle X^k, P_n \rangle$ . Vous distinguerez plusieurs cas de figure.
- Q22 Give a closed form expression for  $\sum_{0 \leq 2p \leq n} \frac{1}{4^p (p!)^2 (n-2p)!}$ . *Hint* : consider  $\|X^n\|$ .

### Partie IV : étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

- Q23 Notons  $U : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P + 2XP' - P''$ . Montrez que  $U$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ , et qu'il est symétrique vis-à-vis du produit scalaire défini précédemment, c'est-à-dire :  $\langle U(P), Q \rangle = \langle P, U(Q) \rangle$  quels que soient les éléments  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$ .
- Q24 Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un vecteur propre de  $U$  ; quelle est nécessairement la valeur propre associée ?
- Q25 Déterminez le spectre de  $U$ , et, pour chaque valeur propre de  $U$ , explicitiez le s.e.v. propre associé.
- Q26 Montrez que  $U$  induit un endomorphisme  $U_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , et prouvez que  $U_n$  est diagonalisable. Calculez la trace et le déterminant de  $U_n$ . Prouvez que  $U$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

### Partie V : complément de programme

- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , définissons  $H_n$  par la relation :

$$H_n(X) = \frac{1}{(-\sqrt{2})^n} P_n\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)$$

Il est clair que  $H_n$  est un polynôme ayant même degré et même parité que  $P_n$ .

- Q27 Écrire une relation liant  $H_n, H_{n+1}$  et  $H_{n+2}$ .
- Q28 Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ , établissez l'égalité de CHRISTOFFEL-DARBOUX :
- $$(x-t) \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{H_k(x)H_k(t)}{k!} = \frac{H_{n+1}(x)H_n(t) - H_{n+1}(t)H_n(x)}{n!}$$
- Q29 Exprimez  $H'_{n+1}$  en fonction de  $H_n$ .
- Q30 Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , établissez :  $(n+1)H_n^2(x) > nH_{n+1}(x)H_{n-1}(x)$ .
- Q31 Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , établissez :

$$H_n(x+y) = n! \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{y^k}{(k!)^2} H_{n-k}(x)$$