Exercice 1

► Nous nous intéressons à la matrice A carrée d'ordre $n+1$, définie par $A_{ij} = \delta_{i+1,j}$ pour tout $i \in [\![1,n+1]\!]$ et tout $j \in [\![1,n+1]\!]$. Nous avons donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Q1 Quel est le rang de A ? Montrez *rapidement* que $A^n \neq 0$, et que $A^{n+1} = 0$. Déterminez le spectre de A. A est-elle diagonalisable ?

Q2 Montrez que A et ${}^tA$ sont semblables.

Q3 Déterminez le rang de $A + {}^tA$; vous distinguerez deux cas selon la parité de n.

Q4 Explicitez la matrice B de la dérivation de $\mathbb{K}_n[X]$, dans la base canonique de ce $\mathbb{K}$-e.v.

Q5 Montrez que A et B sont semblables.

Q6 Peut-on trouver un élément C de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que $C^2 = A$?

Exercice 2

► On note Φ l'application qui, à $P \in \mathbb{R}_3[X]$, associe le reste dans la division euclidienne de P par le polynôme $B = X^2 - 3X + 2$.

Q1 Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Explicitez son noyau, son image, son rang.

Q2 Déterminez la trace de Φ, sans calculer sa matrice.

Q3 Explicitez la matrice A de Φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Q4 Que pensez-vous de A^2 ? Sans longs calculs, montrez que $I_4 + A$ est inversible, et explicitez son inverse.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 (E.N.S.E.M. Orléans, 1990)

▶ Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Définissons $N(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{ij}|$

$\boxed{\text{Q1}}$ Vérifiez que :

$$N(A) = 0 \iff A = 0$$
$$N(\lambda A) = |\lambda| \cdot N(A)$$
$$N(A + B) \leqslant N(A) + N(B)$$
$$N(A \cdot B) \leqslant N(A) \cdot N(B)$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit λ une valeur propre de A. Prouvez que λ vérifie $|\lambda| \leqslant N(A)$.

▶ Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *de Markov* lorsqu'elle vérifie :

(1) $A_{ij} \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in [\![1,n]\!]$

(2) $\sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$\boxed{\text{Q3}}$ Prouvez que l'ensemble S des matrices de Markov est une partie de $M_n(\mathbb{R})$ convexe et stable pour la multiplication matricielle.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soit A une matrice de Markov. Que vaut $N(A)$? Prouvez que 1 est valeur propre de A, précisez un vecteur propre associé. Prouvez que les valeurs propres de A sont de module au plus égal à 1.

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit A une matrice de Markov vérifiant $A_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Notons $\delta = \min\{A_{ii}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Montrez que les images, dans le plan complexe, des valeurs propres de A, sont situées dans le disque dont le centre a pour affixe δ, et qui est tangent au cercle trigonométrique au point d'affixe 1.

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit A une matrice de Markov vérifiant $A_{ij} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in [\![1,n]\!]$.

• Prouvez que $\ker(A - I_n)$ est une droite ; *indication* : considérez d'abord un vecteur propre ayant toutes ses composantes réelles.

• Prouvez que les valeurs propres autres que 1 ont un module strictement inférieur à 1 ; *indication* : raisonnez par l'absurde, et commencez par montrer que si U est un vecteur propre de A associé à une valeur propre de module 1, alors toutes les composantes de U ont le même module.

$\boxed{\text{Q7}}$ La puissance k-ième d'une matrice de Markov est-elle encore une matrice de Markov ?

▶ Dans les deux questions suivantes, A désigne la matrice

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Q8}}$ Déterminez les valeurs propres et les s.e.v. propres de A. Faites une figure représentant le disque évoqué à la question 5, ainsi que les images des valeurs propres de A.

$\boxed{\text{Q9}}$ Explicitez une matrice Q inversible et une matrice D diagonale, telles que $A = Q^{-1}DQ$. En déduire l'expression de A^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

▶ Nous dirons qu'une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers N si la suite de terme général $(M_k)_{ij}$ converge vers N_{ij}, et ce quels que soient $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Quelle est la limite de A^k lorsque k tend vers l'infini ? Le rang est-il conservé par passage à la limite ? Et la trace ?