Exercice 1

Q1 Démontrez le théorème de Rolle généralisé : si une fonction φ de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est continue sur $[a,+\infty[$, dérivable dans $]a,+\infty[$, et vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\varphi(a)$, alors il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $\varphi'(c)=0$.

► Notons $f : t\in\mathbb{R}\mapsto\ln(1+t^2)$. Nous identifions un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ et la fonction polynôme $\widetilde{P}$ associée.

Q2 Montrez que, pour $n\geqslant 1$:

$$f^{(n)}(t)=\frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n}$$

où P_n est un polynôme dont vous préciserez le degré, la parité, et le coefficient dominant. Vous écrirez une relation liant P_{n+1}, P_n et P_n'.

Q3 Prouvez que P_n possède n racines réelles, deux à deux distinctes, et que ces racines séparent celles de P_{n+1}.

Q4 Explicitez P_n pour $1\leqslant n\leqslant 5$; donnez les racines de chacun de ces polynômes, sous la forme la plus simple possible.

Exercice 2

► Soient $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$. Nous voulons établir l'existence de $k\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $f\in\mathcal{C}^4\big([x,x+3h],\mathbb{R}\big)$, il existe $\vartheta\in]0,3[$ vérifiant :

$$f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)=h^3f'''(x)+kh^4f^{(4)}(x+\vartheta h)$$

Q1 En utilisant la fonction $\lambda : t\in[0,3]\mapsto\lambda(t)=x+th$, prouvez qu'il suffit d'établir l'existence de $k\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $f\in\mathcal{C}^4\big([0,3],\mathbb{R}\big)$, il existe $\vartheta\in]0,3[$ vérifiant :

$$f(3)-3f(2)+3f(1)-f(0)=f'''(0)+kf^{(4)}(\vartheta)$$

Q2 Supposons l'existence de k établie ; en choisissant pour f une fonction polynôme aussi simple que judicieuse, prouvez que $k=\frac{3}{2}$.

Q3 Soit Φ la fonction qui, à $P\in\mathbb{R}_4[X]$, associe :

$$\Phi(P)=\Big(\widetilde{P}(0),\widetilde{P}(1),\widetilde{P}(2),\widetilde{P}(3),\widetilde{P'''}(0)\Big)$$

Prouvez que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ sur $\mathbb{R}^5$, ce dernier muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v.

Q4 Soit $(p,q,r,s,t)\in\mathbb{R}^5$. Donnez l'expression de $\Phi^{-1}(p,q,r,s,t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

Q5 Soit $f\in\mathcal{C}^4\big([0,3],\mathbb{R}\big)$ et $P=\Phi^{-1}\big(f(0),f(1),f(2),f(3),f'''(0)\big)$. Notons $g=f-P$. En appliquant répétitivement le théorème de Rolle, établissez l'existence de $\vartheta\in]0,3[$ tel que $g^{(4)}(\vartheta)=0$ et concluez.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

► E désigne un $\mathbb{R}$-e.v. Une partie A de E est un *cône* si elle est stable pour la loi $+$ et si elle vérifie :

$$\forall \overrightarrow{u} \in A : \forall \lambda > 0 : \lambda \overrightarrow{u} \in A$$

$\boxed{\text{Q1}}$ Donnez quelques exemples intéressants de cônes, pris dans des espaces de suites ou de fonctions...

$\boxed{\text{Q2}}$ Tout s.e.v. de E est, clairement, un cône. Que pensez-vous de la réciproque ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Faut-il considérer que la partie vide est un cône ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que l'intersection de deux cônes est elle-même un cône.

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit A une partie non vide de E. En généralisant le résultat précédent, montrez qu'il existe un plus petit cône $C(A)$ contenant A.

$\boxed{\text{Q6}}$ Avec les notations de la question précédente, montrez que $\overrightarrow{u} \in C(A)$ ssi il existe un naturel n non nul, des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ de A, et des réels strictement positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $\overrightarrow{u} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{v_k}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Dans cette question uniquement, $E = \mathbb{R}^3$. Notons $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de E. Caractérisez simplement les éléments du cône $\mathcal{C}$ engendré par $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$. Comparez $\mathcal{C}$ et le cône $\mathcal{T}$ engendré par $\overrightarrow{u} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{w} = (1, 1, 0)$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Soit f un endomorphisme de E et A un cône. $f(A)$ et $f^{-1}(A)$ sont-elles des cônes ?

$\boxed{\text{Q9}}$ Soit φ une forme linéaire sur E et A un cône. Que pouvez-vous dire de $\varphi(A)$?

► Définissons sur E une relation notée $\sim$ par :

$$\overrightarrow{u} \sim \overrightarrow{v} \iff \exists \alpha > 0 : \overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{v}$$

$\boxed{\text{Q10}}$ Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence ; décrivez les classes modulo cette relation.

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrez que tout cône $\mathcal{C}$ est une réunion de classes modulo la relation $\sim$. Que pensez-vous de la réciproque ?