Exercice 1 : dérivations d'une $\mathbb{K}$-algèbre

- Soient : $\mathbb{K}$ un corps ; A une $\mathbb{K}$-algèbre ; $\mathcal{L}(A)$ la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes du $\mathbb{K}$-e.v. A. On note e le neutre de A. Nous identifions $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\alpha e \in A$. Pour $f \in \mathcal{L}(A)$, on note $f^0 = Id_A$ et $f^{n+1} = f \circ f^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Une *dérivation* de A est un endomorphisme D du $\mathbb{K}$-e.v. A vérifiant $D(xy) = xD(y) + D(x)y$ pour tous x et y dans A. Notons $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des dérivations de A.

Q1 Donnez deux exemples de triplets $(\mathbb{K}, A, D)$, tels que $\mathbb{K}$ soit un corps, A une $\mathbb{K}$-algèbre, et D une dérivation de A.

Q2 Vérifiez que l'endomorphisme D du $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}[X]$ défini par $D(1) = 0$ et $D(X^n) = nX^n$ pour tout $n \geqslant 1$ est une dérivation de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[X]$.

Q3 Soit D une dérivation de A ; calculez $D(e)$, puis $D(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{K}$.

Q4 Soit $a \in A$; montrez que $D_a : x \in A \mapsto ax - xa$ est une dérivation de A.

Q5 Montrez que $\mathcal{D}(A)$ est un s.e.v. du $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{L}(A)$, mais que ce n'est pas, en général, une sous-algèbre de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}(A)$.

Q6 Soient D_1 et D_2 deux dérivations de A. Montrez que $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ est encore une dérivation de A.

Q7 Pour cette question uniquement, nous supposons l'algèbre A commutative. D désigne une dérivation de A. Pour $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, calculez $D(x^n)$.

Q8 Soient x et y dans A, et $n \in \mathbb{N}$. Établissez la formule de Leibniz :

$$D^n(xy) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(x) D^{n-k}(y)$$

Exercice 2 : sur la continuité uniforme

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications f de I de $\mathbb{R}$. $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est *uniformément continue* sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \alpha > 0 : \forall (x, y) \in I^2 : |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Q1 Montrez que $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est uniformément continue sur I ssi, pour toutes suites (a_n) et (b_n) d'éléments de I, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$ implique $\lim\limits_{n\to\infty} \big(f(a_n) - f(b_n)\big) = 0$.

Q2 Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Prouvez que, si f et g sont uniformément continues, $f + g$ est elle-même uniformément continue. Montrez par un contre-exemple qu'il n'en est pas de même pour fg.

Q3 Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Montrez que toute application $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ uniformément continue sur I est bornée. *Remarque* : nous ne supposons pas que I est fermé...

Q4 Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Prouvez que, si f et g sont uniformément continues, fg est elle-même uniformément continue.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 : sur les projecteurs

- Soient $\mathbb{K}$ un corps et E est un $\mathbb{K}$-e.v. Un *projecteur* de E est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$; nous savons alors $E = \ker p \oplus \operatorname{im} p$. Nous savons également que $Id_E - p$ est lui aussi un projecteur de E, que $\ker p = \operatorname{im}(Id_E - p)$, et que $\operatorname{im} p = \ker(Id_E - p)$; une autre façon d'exprimer cette dernière égalité consiste à dire que $\operatorname{im} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p.
- Toute somme *directe* de s.e.v. devra être justifiée.
- Dans les deux questions suivantes, p désigne un projecteur de E.

Q1 Montrez que pour tout s.e.v. A de E, on a :

$$p^{-1}(A) = (A \cap \operatorname{im} p) \oplus \ker p$$

Q2 Montrez qu'un s.e.v. de E est stable par p si et seulement s'il est somme directe d'un s.e.v. du noyau de p et d'un s.e.v. de l'image de p.

- Dans les cinq questions suivantes, p et q désignent deux projecteurs de E.

Q3 Montrez que p et q ont la même image si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

Q4 De même, donnez une condition nécessaire et suffisante pour que p et q aient le même noyau.

Q5 Montrez que si f est un endomorphisme de E, alors :

$$\ker(f \circ q) = \ker q \oplus (\ker f \cap \operatorname{im} q)$$

Q6 Montrez que si g est un endomorphisme de E, alors :

$$\operatorname{im}(p \circ g) = \operatorname{im} p \cap (\operatorname{im} g + \ker p)$$

Q7 Montrez que $p \circ q$ est aussi un projecteur de E si et seulement si :

$$\operatorname{im} p \cap (\operatorname{im} q + \ker p) \subset \operatorname{im} q \oplus (\ker p \cap \ker q).$$