$\boxed{\text{HX4 — Contrôle 1993/04}}$

Exercice 1

► Notons A la partie de $\mathbb{C}$ définie par $A = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour $x \in A$, notons $N(x) = |x|^2$. Notons U l'ensemble des éléments inversibles de A.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que $(A, +, \times)$ est un anneau intègre.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $(U, \times)$ est un groupe.

► Dans les deux questions suivantes, notons $\varphi : A \mapsto A$ un morphisme de l'anneau.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que $\varphi(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Quelle peut être la valeur de $\varphi(i)$?

$\boxed{\text{Q5}}$ Trouvez alors tous les morphismes d'anneau de A.

$\boxed{\text{Q6}}$ À l'aide de la relation $N(xy) = N(x)N(y)$, trouvez tous les élément de U.

$\boxed{\text{Q7}}$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; montrez qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|\alpha - n| \leqslant \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Soit $x \in A$ et $y \in A \setminus \{0\}$. Posons $\frac{x}{y} = u + iv$, avec $(u, v) \in \mathbb{Q}^2$. Montrez qu'il existe $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\big|(u + iv) - (u_0 + iv_0)\big| < 1$, puis qu'il existe $(q, r) \in A^2$ tel que $x = qy + r$ et $N(r) < N(y)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Trouvez tous les couples (q, r) lorsque $x = 2 + 3i$ et $y = 1 + i$.

► Dans les deux questions suivantes, I désigne un idéal non nul de A. Notons $N(I) = \{N(x) \mid x \in I\}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Justifiez l'existence de $y \in I \setminus \{0\}$ tel que $N(y) = \min N(I)$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrez que I est égal à l'idéal engendré par y.

$\boxed{\text{Q12}}$ Montrez que l'anneau A est principal.

► Un élément x de A est *irréductible* dans A s'il n'est pas inversible, et si, pour tout $(y, z) \in A^2$, l'égalité $x = yz$ implique $y \in U$ ou $z \in U$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Soit $x \in A$ tel que $N(x)$ soit un naturel premier. Montrez que x est irréductible dans A.

$\boxed{\text{Q14}}$ En prenant $x = 3$, montrez que la réciproque est fausse.

$\boxed{\text{Q15}}$ Soit p un naturel premier. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$. Montrez que p n'est pas irréductible dans A.

► Soient x et y deux éléments de A. Nous dirons que x divise y s'il existe $z \in A$ tel que $y = xz$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Soient z, z_1 et z_2 trois éléments de A. Suppose que z est irréductible, et qu'il divise $z_1 z_2$. Montrez que z divise z_1 ou z_2.

Tournez S.V.P.

Exercice 2

► Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est *lipschitzienne* si :

$$\exists k \geqslant 0 : \forall (x,y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

Q1 Prouvez que, si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est lipschitzienne, il en est de même pour $|f|$. Que pensez-vous de la réciproque ?

Q2 Prouvez que la somme de deux fonctions $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ lipschitziennes est elle-même lipschitzienne, mais qu'il n'en est pas nécessairement de même pour leur produit.

Q3 Prouvez que, si I est borné, et si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est lipschitzienne, alors f est bornée. En déduire que, si I est borné, le produit de deux applications $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : I \mapsto \mathbb{R}$ lipschitziennes est lui-même lipschitzien.

Q4 Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $f(I)$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$. On suppose f et g lipschitziennes. Que peut-on dire de $g \circ f$?

Q5 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non disjoints, et $f : I \cup J \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que la restriction de f à I est lipschitzienne, ainsi que la restriction de f à J. Prouvez que f est lipschitzienne.

Q6 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \in [0,1] \mapsto x^n$. Montrez que f est lipschitzienne, et déterminez le plus petit réel $k \geqslant 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$ pour tous x et y dans $[0,1]$.

Exercice 3

► Notons *APCR* pour *à partir d'un certain rang*. Une suite de réels (u_n) est dite *périodique APCR* s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_{n+p} = u_n$; on dira que p est une période de (u_n) APCR.

Q1 Montrez que si une suite (u_n) est périodique APCR, il existe un indice $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_q = u_{2q}$.

Q2 Réciproquement, on suppose que (u_n) est définie par la donnée de son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même ; montrez que, s'il existe un indice $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_q = u_{2q}$, alors (u_n) est périodique APCR.

► On dispose d'une fonction écrite en Pascal :

```
function f(x:integer):integer;
```

On considère la suite de relatifs définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q3 Prouvez que la suite calculée par l'ordinateur est périodique APCR.

Q4 Écrire un programme qui applique la méthode exposée plus haut, pour déterminer *une* période APCR de cette suite. On s'interdira tout stockage superflu de termes de la suite (u_n) ; en particulier, l'emploi de `array` est interdit.

Q5 On suppose que l'on a écrit les définitions suivantes :

```
const a = ...; (* une valeur du type integer *)
function f(x:integer):integer;
begin
   f:=x+a
end; (* f *)
```

Prouvez que la suite calculée par l'ordinateur est périodique tout court (autrement dit : à partir du rang 0). Que représente la période, pour `a` ? Quelle est la valeur maximale de la période ? Pour quelle(s) valeur(s) de la constante `a` est-elle obtenue ?