Exercice 1

► Une partie A de $\mathbb{R}$ est *discrète* si, pour tout élément a de A, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A = \{a\}$.

Q1 Montrez que, si A est discrète, toute partie B de A est discrète.

Q2 Montrez que toute partie finie de $\mathbb{R}$ est discrète. $\mathbb{Z}$ est-elle une partie discrète de $\mathbb{R}$?

Q3 Prouvez que, si A est une partie infinie de $\mathbb{R}$, on peut construire une suite (x_n) d'éléments de A deux à deux distincts.

Q4 Donnez un exemple de partie A de $\mathbb{R}$, infinie, bornée et discrète. Une telle partie peut-elle être fermée ?

Q5 La réunion de deux parties discrètes est-elle discrète ? et leur intersection ?

Exercice 2

► Les quatre questions de cet exercice sont totalement indépendantes les unes des autres.

Q1 En utilisant des équivalents que vous justifierez, calculez $\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$.

Q2 Pour x et y appartenant à $]0,1[$, établissez $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$. En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$. *Indication* : observez S_2 et S_3 (et, au besoin, S_4) et formulez une hypothèse de récurrence.

Q3 Rédigez une procédure en Pascal dont voici l'en-tête :

```
function CalculeT(n:integer):real;
```

qui évalue $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2}\right)$ en n'effectuant que des additions, des soustractions, et des appels de la fonction de bibliothèque `arctan`.

Q4 Soit $f : x \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1)$. Précisez l'ensemble de définition de f, puis résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

- Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble des suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les propriétés suivantes :
  (1) les t_n sont des naturels non nuls
  (2) $t_0 = 1$
  (3) $t_{n+1} \geqslant {t_n}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
  (4) $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite constante égale à 1
- À toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $\mathcal{X}$, nous associons la suite de rationnels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Big(1 + \dfrac{1}{t_k}\Big)$.
- Dans les trois questions suivantes, α désigne un naturel au moins égal à 2. Nous considérons la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_0 = 1$ et $t_n = \alpha^{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{X}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est associée à $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation $a_n = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\Big(1 - \dfrac{1}{\alpha^{2^n}}\Big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, précisez sa limite.

- Dans les quatre questions suivantes, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne un élément quelconque de $\mathcal{X}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui lui est associée est strictement croissante.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t_n \geqslant 2$ pour tout $n \geqslant n_0$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $k \geqslant n_0$; pour $p \in \mathbb{N}^*$, établissez :

$$a_k\Big(1 + \frac{1}{t_{k+1}}\Big) \leqslant a_{k+p} \leqslant a_k \prod_{1\leqslant j\leqslant p} \Big(1 + \frac{1}{(t_{k+1})^{2^{j-1}}}\Big)$$

Attention : l'exposant de t_{k+1} est 2^{j-1}.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $a > 1$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrez que la fonction $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \dfrac{x}{x-1}$ réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur lui-même.

$\boxed{\text{Q9}}$ En déduire que, pour tout $x \in]1, 2]$, il existe un et un seul naturel $n \geqslant 2$ tel que $\dfrac{n+1}{n} < x \leqslant \dfrac{n}{n-1}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Calculez n pour $x = 1{,}0001$.

- Dans les quatre questions suivantes, x désigne un élément de $]1, 2]$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Construisez, par récurrence, une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de naturels non nuls telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} :\ 1 + \frac{1}{t_{k+1}} < \frac{x}{a_k} \leqslant \frac{t_{k+1}}{t_{k+1} - 1}$$

où $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite associée à $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Montrez que la suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{X}$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = x$.