$\boxed{\text{HX4 — Contrôle 1993/02}}$

Exercice 1

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudiez les variations de la fonction $f\,:\,t > 0 \mapsto (p-1)t + \dfrac{a^p}{t^{p-1}}$, et montrez que $f(t) \geqslant pa$ pour tout $t > 0$.

► Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Notons $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $m(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $g(x) = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Établissez $g(x) \leqslant m(x)$; vous procéderez par récurrence sur n, en utilisant l'inégalité de Q1 avec $t = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k}$, et un choix judicieux de a et p.

► Notons $h(x)$ le réel défini par la relation $\dfrac{1}{h(x)} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Établissez $h(x) \leqslant g(x)$.

► u_0, v_0 et w_0 sont trois réels qui vérifient $0 < w_0 \leqslant v_0 \leqslant u_0$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3} \qquad v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \qquad \frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\Big)$$

permettent de définir **effectivement** trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) de réels strictement positifs.

$\boxed{\text{Q5}}$ Établissez $0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que les suites (u_n) et (w_n) sont monotones, en précisant le sens de variation de chacune d'elles.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que les suites (u_n) et (w_n) convergent.

$\boxed{\text{Q8}}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, établissez l'égalité $u_{n+1} - w_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}(u_n - w_n)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ En déduire que les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite.

$\boxed{\text{Q10}}$ Pour quels n-uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels strictement positifs a-t-on l'égalité $g(x) = m(x)$?

$\boxed{\text{Q11}}$ Qu'en-est-il de l'égalité $h(x) = g(x)$?

Tournez S.V.P.

Exercice 2

► $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x ; c'est l'unique relatif k vérifiant $k \leqslant x < k+1$. Les questions sont indépendantes.

$\boxed{\text{Q1}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$, établissez la formule $\lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Pour x et y réels, établissez la formule $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$. Vous commencerez par vous ramener au cas où x et y sont tous deux dans $[0,1]$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Établissez la formule $-\left\lfloor -\dfrac{n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n+m-1}{m} \right\rfloor$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Répartissons n objets dans p tiroirs. Montrez que l'un au moins des tiroirs contient au plus $\left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$ objets ; et que l'un au moins des tiroirs contient au moins $-\left\lfloor -\dfrac{n}{p} \right\rfloor$ objets.

$\boxed{\text{Q5}}$ Pour x réel et n naturel non nul, établissez la formule $\lfloor nx \rfloor = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor$

Exercice 3

► Quelques rappels : pour $0 \leqslant p \leqslant n$, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dbinom{n}{n-p}$; pour $0 < p \leqslant n$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$; pour $0 < p < n$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$. Toute autre formule devra être justifiée.

$\boxed{\text{Q1}}$ Pour p et q dans $\mathbb{N}$, établissez la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Une urne contient $n+1$ jetons numérotés de 1 à $n+1$. Soient $p \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![p,n]\!]$. De combien de façons peut-on choisir dans cette urne $p+1$ jetons, si l'on exige que le plus grand numéro choisi soit égal à $k+1$? Retrouvez ainsi le résultat précédent.

► Un article intitulé « Note on internal merging », paru dans *Software – Practice and Experience* **2** (1972), se termine par :

> « It can be shown that the expected number of saved transfers... is given by the expression
>
> $$T = \sum_{r=0}^{n} r \frac{{}_{m-r-1}\mathrm{C}_{m-n-1}}{{}_{m}\mathrm{C}_{n}}$$
>
> [...] ${}_m\mathrm{C}_n$ is the symbol for the number of combinations of m objects taken n at a time[...] The author is grateful to the referee for reducing a more complex equation for expected transfers saved to the form given here. »

$\boxed{\text{Q3}}$ Traduisez le texte précédent, y compris les coefficients binomiaux. *Cette question est facultative pour celles et ceux qui n'ont jamais étudié l'anglais.*

$\boxed{\text{Q4}}$ En écrivant $k = m - (m-k)$, établissez la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1} = mA - (m-n)B$, où $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{m-k-1}{m-n-1}$ et $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{m-k}{m-n}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ En utilisant le résultat de Q1, simplifiez B, puis A.

$\boxed{\text{Q6}}$ Donnez alors une expression *très simple* de T.

$\boxed{\text{Q7}}$ Quelles réflexions vous inspire cet exercice ?