

Exercice 1

- Q1 Pour $0 \leq k \leq n$, établissez : $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$. Précisez le(s) cas où cette inégalité est stricte.
- Q2 Pour $k \geq 4$, établissez : $2^k \leq k!$.
- Q3 ** Pour $n \geq 1$, établissez : $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{67}{24}$.

Exercice 2

► Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE (preuve à l'appui, bien entendu).

- Q1 Si deux suites de réels (u_n) et (v_n) vérifient $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^{1994} + v_n^{1994}) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.
- Q2 Si deux suites de complexes (u_n) et (v_n) vérifient $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^4 + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^4 = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.
- Q3 Si les séries (u_n) et (v_n) , à termes positifs, convergent, alors la série $(u_n v_n)$ converge également.
- Q4 Si une suite (u_n) de réels converge vers 0, alors $u_{n+1} \widetilde{\sim}_{n \rightarrow \infty} u_n$.
- Q5 Si une suite (u_n) de réels vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$, alors cette suite est croissante à partir d'un certain rang ; autrement dit : $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$.
- Q6 Si une suite (u_n) de réels positifs converge vers 0, alors on peut en extraire une suite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $u_{\varphi(n)} < 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Q7 Si la série (u_n) , à termes positifs, converge, alors la série (u_n^2) converge également.

Exercice 3

► Dans cet exercice, les «équivalents simples» demandés sont de la forme λn^k , avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. On rappelle que, si une suite (x_n) de réels converge vers 0, alors $1 - \cos(x_n) \widetilde{\sim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{2}$.

- Q1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\cos x = nx$ possède, dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, une et une seule solution, qui sera notée u_n .
- Q2 Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$?
- Q3 En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n>0}$, et préciser sa limite ℓ .
- Q4 Donner un équivalent simple de u_n quand n tend vers l'infini.
- Q5 Notons $\alpha_n = \frac{1}{n} - u_n$. Précisez le signe de α_n , puis donner un équivalent simple de α_n quand n tend vers l'infini.
- Q6 Notons $\beta_n = u_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3}$. Établissez la relation $\beta_n = \frac{(1 + 2n \sin(u_n/2))(1 - 2n \sin(u_n/2))}{2n^3}$.
- Rappel : $x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ pour $x > 0$.
- Q7 Donnez un équivalent simple de $1 - 2n \sin\left(\frac{u_n}{2}\right)$ quand n tend vers l'infini, puis un équivalent simple de β_n quand n tend vers l'infini.