

Q1 • f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. f est périodique, de période 2π ; de plus, pour tout $x \in D_f$, $f(\pi - x) = f(x)$. Nous étudions donc f sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Nous compléterons ensuite la courbe par symétrie orthogonale autour de la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, puis par les translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$, k décrivant \mathbb{Z} .

Q2 • Étude sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$: lorsque x tend vers $-\frac{\pi}{2}$ par valeurs supérieures, $f(x)$ tend vers $-\infty$.

- $f'(x) = -\frac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$, d'où le tableau des variations de f sur l'intervalle considéré.
- Les transformations simples qui conservent globalement \mathcal{C} sont les translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$, k décrivant \mathbb{Z} , et les symétries orthogonales autour de chaque droite d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, toujours avec $k \in \mathbb{Z}$.

Q3 • En effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{2}$, il vient :

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2 \cos^2(t/2)} = \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\cos^2(u)} = [\tan(u)]_0^{\pi/4} = 1$$

Q4 • L'aire cherchée est $A = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \sin(x)}$; par raison de symétrie, $A = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin(x)}$. Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ nous donne $A = 2 \int_{\pi/2}^0 \frac{-dt}{1 + \cos(t)} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 2J$; donc A est égale à 2 unités d'aire, ou 8 cm².

Q5 • Nous avons $\lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3\pi/2^-} g(x) = +\infty$.

$$g'(x) = \frac{1 + \sin(x) - x \cos(x)}{(1 + \sin(x))^2} = \frac{h(x)}{(1 + \sin(x))^2}$$

$h'(x) = x \sin(x)$, d'où le tableau des variations de h , sur lequel on constate que $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, avec $h(x) = 0$ uniquement si $x = 0$ ou $x = \pi$. g' ayant le signe de h , nous en déduisons que g est strictement croissante sur I .

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\varphi'(x)$	+	+	-	
$\varphi(x)$	0	↗ 1 ↗	↘	0

Q6 • g est continue et strictement croissante; d'après le théorème d'inversion, elle réalise une bijection de I sur $\left] \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 3\pi/2^-} g(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

- $g(x) - x = -\frac{x \sin(x)}{1 + \sin(x)}$ est du signe de $-x \sin(x)$; donc : pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \pi \right[$, Γ est au-dessous de D (avec contact pour $x = 0$); Γ coupe D au point d'abscisse π ; et, pour $x \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$, Γ est au-dessus de D .

Q7 Pour les mêmes raisons de symétrie que celles invoquées en Q3, $\int_{\pi/2}^\pi \frac{dt}{1 + \sin(t)} = J$. D'où :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^\pi \frac{x}{1 + \sin(x)} dx = \int_\pi^0 \frac{\pi - t}{1 + \sin(\pi - t)} (-dt) = \int_0^\pi \frac{\pi - t}{1 + \sin(t)} dt \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{dt}{1 + \sin(t)} - \int_0^\pi \frac{t dt}{1 + \sin(t)} = 2\pi J - K \end{aligned}$$

Ainsi $K = \pi J = \pi$.

Q8 Toujours par raison de symétrie, l'aire cherchée est égale à

$$2 \int_0^\pi (x - g(x)) dx = \int_0^\pi 2x dx - 2 \int_0^\pi \frac{x}{1 + \sin(x)} dx = [x^2]_0^\pi - 2K = \pi^2 - 2\pi$$

unités d'aire, soit $(4\pi^2 - 8\pi)$ cm².

Q9 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, donc $g^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$. Comme g est strictement croissante, g^{-1} l'est aussi, donc $g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) > \frac{\pi}{2}$, soit $u_1 > u_0$. Supposons acquise l'inégalité $u_{n+1} > u_n$, alors $g^{-1}(u_{n+1}) > g^{-1}(u_n)$, soit $u_{n+2} > u_{n+1}$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante ; comme g^{-1} réalise une bijection de \mathbb{R} sur I , cette suite est également majorée par $\frac{3\pi}{2}$, donc converge vers une limite $\ell \leq \frac{3\pi}{2}$. Mais g^{-1} est continue : donc la limite doit vérifier $\ell = g^{-1}(\ell)$, soit $g(\ell) = \ell$; l'étude faite en Q6 montre que ℓ doit être égal à 0 ou à π ; le premier cas est exclu, puisque la suite est croissante et que son premier terme $u_0 = \frac{\pi}{2}$ est strictement supérieur à 0. Conclusion : $\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pi}$.

- Q10
- Si $u_0 = 0$, la suite est constante ; de même si $u_0 = \pi$.
 - Si $u_0 \in]0, \pi[$, alors $u_1 = g^{-1}(u_0) > u_0$ d'après Q6 ; le raisonnement de Q9 montre que la suite est croissante, donc converge encore vers π .
 - Si $u_0 \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$, alors $u_1 = g^{-1}(u_0) < u_0$: cette fois, la suite est décroissante ; comme $g^{-1}(\pi) = \pi$, une récurrence immédiate montre que $u_n > \pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \pi}$.
 - Enfin, si $u_0 \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$, alors $u_1 = g^{-1}(u_0) > u_0$; la suite est croissante. Comme $g^{-1}(0) = 0$, Nous aurons par récurrence $u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.

Source : concours d'entrée 1986 à l'École Polytechnique Féminine.