HX4 — Contrôle 1992/11

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Problème : polynômes de Laguerre

Partie I : convergence absolue, semi-convergence

► On note $E = \mathcal{C}\big([0,+\infty[,\mathbb{R}\big)$ et F l'ensemble des éléments de E tels que $\int_0^{+\infty} f^2(t)\,dt$ converge.

Q1 Soit $f \in E$. On note $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = \sup(-f,0)$. En observant $f^+ + f^-$ et $f^+ - f^-$, montrez que f^+ et f^- sont encore dans E.

Q2 Soit $f \in E$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge. Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge également. *Remarque* : on dit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est *absolument convergente*.

Q3 Exhibez $f \in E$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ diverge. *Remarque* : on dit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est *semi-convergente*.

Q4 Montrez que, si f et g sont dans F, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ converge. Vous noterez que, pour tous réels a et b, $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.

Q5 Montrez que F est un s.e.v. de E.

Partie II : une définition des polynômes de Laguerre

► Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \geqslant 0 \mapsto \dfrac{1}{n!}x^n e^{-x}$. On identifie $P \in \mathbb{R}[X]$ et l'application $x \geqslant 0 \mapsto \widetilde{P}(x)$, si bien que $\mathbb{R}[X]$ apparaît comme une partie de E.

Q6 Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $\mathcal{L}_n$, dont vous donnerez l'expression dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, tel que $f_n^{(n)}(x) = \mathcal{L}_n(x)e^{-x}$. Calculez $\mathcal{L}_n(0)$.

Q7 Explicitez $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$. Vérifiez que, pour $k \in [\![1,3]\!]$, $\mathcal{L}_k$ possède k racines réelles, toutes strictement positives.

Partie III : définition d'une structure euclidienne

► On note G l'ensemble des éléments de E tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}\,dt$ converge.

Q8 Calculez $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ après avoir établi la convergence de cette intégrale.

Q9 Montrez que $\mathbb{R}[X]$ est strictement contenu dans G.

Q10 Soient f et g deux éléments de G. En utilisant Q4, établissez la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,dt$. En déduire que G est un s.e.v. de E.

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrez que $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,dt$ définit un produit scalaire sur G.

$\boxed{\text{Q12}}$ Soit $u \in \mathbb{R}[x]$ et $n \in \mathbb{N}$. Établir :

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{L}_n(t)u(t)e^{-t}\,dt = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n u^{(n)}(t)\,dt$$

Vous utiliserez la formule de Leibniz, et la formule d'intégration par parties itérée :

$$\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\Big[(-1)^k f^{(n-k-1)}(t)g^{(k)}(t)\Big]_a^b + (-1)^n\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,dt$$

que l'on ne vous demande pas de redémontrer ; vous devrez toutefois vous assurer de la convergence des quantités qui apparaissent au membre de droite…

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez que $(\mathcal{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$, lorsque l'on munit ce dernier du produit scalaire induit par celui que l'on vient de définir sur G.

$\boxed{\text{Q14}}$ Montrez que $\langle \mathcal{L}_n, u\rangle = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Partie IV : quelques relations entre les polynômes de Laguerre

$\boxed{\text{Q15}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez l'existence de réels α_n, β_n et γ_n tels que $X\mathcal{L}_n = \alpha_n\mathcal{L}_{n+1} + \beta_n\mathcal{L}_n + \gamma_n\mathcal{L}_{n-1}$. Vous établirez au préalable l'égalité $\langle X\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m\rangle = \langle \mathcal{L}_n, X\mathcal{L}_m\rangle$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Écrivez une relation simple liant α_n, β_n et γ_n ; calculez α_n.

$\boxed{\text{Q17}}$ En utilisant la formule de Leibniz, établissez une relation liant $\mathcal{L}_{n+1}$, $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{L}'_n$.

$\boxed{\text{Q18}}$ laguerreqxviii En déduire une relation liant $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{L}'_n$ et $\mathcal{L}_{n-1}$. Calculez β_n et γ_n.

Partie V : racines des polynômes de Laguerre

$\boxed{\text{Q19}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $\mathcal{L}_n$ possède exactement n racines réelles, distinctes, toutes strictement positives. Pour ce faire, vous définirez un polynôme ω comme suit : si $\mathcal{L}_n$ possède, dans $]0, +\infty[$, des racines d'ordre de multiplicité impair, alors notant $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ces racines, on pose $\omega = (X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_p)$; sinon, on pose $\omega = 1$. Vous observerez $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathcal{L}_n(t)\omega(t)e^{-t}\,dt$ à la lueur de Q14.

$\boxed{\text{Q20}}$ Montrez que, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{L}_{n-1}$ sont étrangers

$\boxed{\text{Q21}}$ On note ξ_n la plus petite racine de $\mathcal{L}_n$; montrez que la suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

$\boxed{\text{Q22}}$ Améliorez le résultat précédent, en montrant que les racines de $\mathcal{L}_n$ séparent celles de $\mathcal{L}_{n+1}$. *Indication* : utilisez une relation établie en Q.

$\boxed{\text{Q23}}$ Pour $n \geqslant 1$, on note x_n la plus grande racine de $\mathcal{L}_n$. Montrez que $x_n \geqslant 2n - 1$, l'inégalité étant stricte pour $n \geqslant 2$.

Partie VI : étude du projecteur orthogonal de G sur $\mathbb{R}_n[X]$

► Pour $g \in G$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $\Pi_n(g) = \sum\limits_{k=0}^{n} \langle g, \mathcal{L}_k\rangle \mathcal{L}_k$.

$\boxed{\text{Q24}}$ Soit $g \in G$. Montrez que $\langle \Pi_n(g), h\rangle = \langle g, h\rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}_n[X]$. En déduire $\|g - \Pi_n(g)\| \leqslant \|g - h\|$ pour tout $h \in \mathbb{R}_n[X]$, et montrez que $\Pi_n(g)$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant cette condition. Que pouvez-vous dire de l'application $g \in G \mapsto \Pi_n(g)$?

$\boxed{\text{Q25}}$ Soit $g \in G$. Montrez que la série de terme général $\langle g, \mathcal{L}_n\rangle^2$ converge. Que pouvez-vous dire de cette série si $g \in \mathbb{R}[X]$?

$\boxed{\text{Q26}}$ En calculant de deux façons différentes $\|X^n\|^2$, retrouvez une identité combinatoire bien connue.

$\boxed{\text{Q27}}$ Soit $a > -1$. Calculez $J_n(a) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-(a+1)t}\,dt$.

$\boxed{\text{Q28}}$ Dans cette question, on fixe un réel $a > -\dfrac{1}{2}$ et on note $g:\ x \geqslant 0 \mapsto e^{-ax}$. Prouvez que $g \in G$, calculez $\|g\|^2$ et $\langle g, \mathcal{L}_n\rangle$. Prouvez que la série définie à la question précédente converge vers $\|g\|^2$, et calculez $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|g - \Pi_n(g)\|$.

Partie VII : étude d'un endomorphisme symétrique

► On note $D:\ P \in \mathbb{R}[X] \mapsto XP'' + (1-X)P'$.

$\boxed{\text{Q29}}$ Montrez que D est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}[X]$, autrement dit : $\langle D(P), Q\rangle = \langle P, D(Q)\rangle$ quels que soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. Prouvez que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D, précisez le noyau de D.

$\boxed{\text{Q30}}$ Soit P un vecteur propre de D ; explicitez, en fonction du degré n de P, la valeur propre λ_n associée.

$\boxed{\text{Q31}}$ Vérifiez que $\mathcal{L}_n$ est vecteur propre de D. Déterminez le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_n. Calculez la trace de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par D.