

Exercice 1

- Dans cet exercice, n est un naturel non nul fixé. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note \overline{A} la matrice définie par $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket : (\overline{A})_{ij} = \overline{A_{ij}}$.

- Q1 Montrez que ${}^t(\overline{A}) = \overline{{}^tA}$. On note A^* cette matrice, vérifiez que $(A^*)^* = A$.
 ► A sera dite *hermitienne* si $A = A^*$.
- Q2 L'application $A \mapsto A^*$ est-elle un endomorphisme du \mathbb{R} -e.v. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? du \mathbb{C} -e.v. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
- Q3 Montrez que $(AB)^* = B^*A^*$, puis que $(A^*)^p = (A^p)^*$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- Q4 Montrez que $AA^* = 0$ implique $A = 0$; on calculera $(AA^*)_{ii}$.
- Q5 On suppose A non nulle et hermitienne. Montrez que $A^p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Vous commencerez par le cas où p est une puissance de 2.
- Q6 On suppose que A vérifie $AA^* = A^*A$ et $A \neq 0$. Montrez que $A^p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Vous vous intéresserez à $B = AA^*$.
- Q7 Montrez que l'ensemble des matrices hermitiennes est un s.e.v. du \mathbb{R} -e.v. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; précisez sa dimension.
- Q8 Quelle est la trace de l'endomorphisme $A \mapsto A^*$ du \mathbb{R} -e.v. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son déterminant ?

Exercice 2

- \mathbb{K} est un corps quelconque. \mathcal{E} désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, rangée comme suit :

$$\mathcal{E} = (\Omega_{11}, \Omega_{12}, \dots, \Omega_{1n}, \Omega_{21}, \Omega_{22}, \dots, \Omega_{2n}, \dots, \Omega_{n1}, \dots, \Omega_{nn})$$

avec $(\Omega_{ij})_{\ell k} = \delta_{i\ell} \delta_{jk}$. On note \mathcal{E}^* la base duale de \mathcal{E} .

- On rappelle que la trace d'un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le scalaire $\text{tr}(A) = \sum_{1 \leq i \leq n} A_{ii}$, et que l'application « trace » est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Q1 Simplifiez $\Omega_{ij}\Omega_{jk}$, puis $\Omega_{ij}\Omega_{\ell k}$.
- Q2 Quelle est l'expression de tr dans la base \mathcal{E}^* ? Simplifiez $\text{tr}(\Omega_{ij})$.
- Q3 Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrez que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- Q4 Soit C un autre élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A-t-on nécessairement $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$?
- Q5 Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrez que $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$.
 ► Dans les trois questions suivantes, A et B sont fixées, et on considère $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AMB$.
- Q6 Vérifiez que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Q7 Montrez que φ est bijectif si et seulement si A et B sont toutes deux régulières.
- Q8 On note $A \otimes B$ la matrice de φ dans \mathcal{E} . Soient P et Q deux autres éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrez que $(P \otimes Q)(A \otimes B) = (PA) \otimes (BQ)$.
- Q9 Dans cette question, $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Explicitez $A \otimes B$.
- Q10 Vérifiez sur l'exemple précédent que $\text{tr}(A \otimes B) = (\text{tr } A)(\text{tr } B)$.
- Q11 Montrez que $f : (i, j) \mapsto n(i-1) + j$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n^2 \rrbracket$.
- Q12 Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouvez que $\text{tr}(A \otimes B) = (\text{tr } A)(\text{tr } B)$.

Tournez S.V.P.

Problème

► Notons $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -e.v. des matrices réelles à p lignes et q colonnes ; et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -e.v. des matrices réelles carrées d'ordre n .

► Soient p et q deux naturels non nuls. Une pq -matrice réelle A est dite *harmonique* si elle vérifie la propriété :

$$(\mathcal{Harm}) \quad \forall i \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket \forall j \in \llbracket 2, q-1 \rrbracket : A_{ij} = \frac{A_{i,j-1} + A_{i,j+1} + A_{i-1,j} + A_{i+1,j}}{4}$$

► Le *bord* de la matrice A est constitué des coefficients des lignes 1 et p , et des colonnes 1 et q ; ce bord est dit *nul* si tous ses coefficients sont nuls. Pour toute pq -matrice A , notons $M(A) = \max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} A_{ij}$ et $m(A) = \min_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} A_{ij}$

Q1 Montrez que l'ensemble $\mathcal{H}_{p,q}(\mathbb{R})$ des pq -matrices réelles harmoniques est un s.e.v. de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Q2 Soit A harmonique. Montrez que si A_{ij} n'appartenant pas au bord de A est égal à $M(A)$, alors

$$A_{i,j-1} = A_{i,j+1} = A_{i-1,j} = A_{i+1,j} = M(A)$$

Q3 Prouvez que $M(A)$ est atteint au moins une fois sur le bord de A , et qu'il en est de même pour $m(A)$.

Q4 Que pouvez-vous dire d'une matrice harmonique de bord nul ?

Q5 Supposons connus les coefficients du bord d'une matrice A . Considérons (\mathcal{Harm}) comme un système de $(p-2)(q-2)$ équations linéaires, aux $(p-2)(q-2)$ inconnues $(A_{ij})_{1 < i < p, 1 < j < q}$. Montrez que, si ce système possède une solution, elle est unique. En déduire que la matrice du système est inversible, et que le système possède une solution.

Q6 Quelle est la dimension de $\mathcal{H}_{p,q}(\mathbb{R})$?

Q7 Prouvez que, si A est harmonique, il en est de même pour tA . Décrivez d'autres endomorphismes involutifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent $\mathcal{H}_{nn}(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension du \mathbb{R} -e.v. $\mathcal{HS}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles harmoniques symétriques ?

Q8 Déterminez un supplémentaire de $\mathcal{H}_{p,q}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Q9 Déterminez la matrice harmonique réelle carrée d'ordre 6, dont chaque « côté » du bord est constitué dans l'ordre de $(0, 0, 1, 1, 0, 0)$. Vous montrerez que la question se ramène à la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues.

► Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, et B définie par : $B_{ij} = \frac{A_{i,j-1} + A_{i,j+1} + A_{i-1,j} + A_{i+1,j}}{4}$ si A_{ij} n'appartient pas au bord de A ; $B_{ij} = A_{ij}$ sinon. La fonction $\mathbf{H} : A \mapsto B$ est clairement un endomorphisme de $\mathcal{M}_{p,q}(p, q)$ (on ne demande pas de le prouver).

On a défini :

```
1 const max_dimension = 20;
2 type Matrice = array[1..max_dimension, 1..max_dimension] of real;
```

Q10 Rédigez une procédure :

```
1 procedure Harmonise(var A:Matrice;n:integer);
2 (* remplace, dans la matrice A carrée d'ordre n, chaque terme *)
3 (* ayant ses deux indices compris entre 2 et n-1 inclus, *)
4 (* par la moyenne de ses quatre voisins immédiats *)
```

dont l'objet est donc de remplacer la matrice A par son image $\mathbf{H}(A)$.

Q11 Dites ce que vous pensez de la suite $(\mathbf{H}^k(A))_{k \in \mathbb{N}}$, où \mathbf{H}^k désigne le k -ième itéré de l'endomorphisme \mathbf{H} (on ne vous demande pas de preuve).