HX4 — Contrôle 1992/09

## Exercice

► Nous dirons que $a$ est un *pôle* de la fraction rationnelle $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ si c'est une racine de $Q(X)$. Le *résidu* de $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ relatif à $a$ est le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ dans la décomposition de $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ en éléments simples.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $a$ un pôle double de la fraction rationnelle $\dfrac{N}{D}$. Montrez que le résidu relatif à $a$ est donné par la formule :

$$\frac{6N'(a)D''(a) - 2N(a)D'''(a)}{3\big[D''(a)\big]^2}$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré $n$, scindé à racines simples. Notons $x_1, \ldots, x_n$ ses racines, supposées classées par ordre croissant : $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Calculez le résidu $\alpha_k$ de $\dfrac{(X^2+1)^n}{P_n^2(X)}$ relatif à $x_k$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Donnez l'allure de la décomposition en éléments simples de $\dfrac{(X^2+1)^n}{P_n^2(X)}$ ; on ne vous demande pas de calculer le coefficient de $\dfrac{1}{(X-x_k)^2}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)^n}{P_n^2(x)}dx$ est rationnelle ssi le polynôme $Q_n = 2nXP_n' - (X^2+1)P_n''$ est multiple de $P_n$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Précisez le degré et le coefficient dominant de $Q_n$, en déduire que la condition de la question précédente est vérifiée ssi $P_n$ vérifie une équation différentielle du second ordre que vous écrirez.

$\boxed{\text{Q6}}$ Notons $P_n = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k X^k$, avec $a_n = 1$. Écrivez les relations entre les coefficients $a_k$ qui se déduisent de l'équation différentielle vérifiée par $P_n$. Explicitez $a_k$ en fonction de $n$ et de $k$, précisez la parité de $P_n$.

$\boxed{\text{Q7}}$ $\mathcal{I}m(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe $z$. Montrez que $P_n = \dfrac{1}{(n+1)}\mathcal{I}m\Big[(X+i)^{n+1}\Big]$.

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire l'expression de $x_k$ en fonction de $k$ et de $n$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Explicitez $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_5$.

## Problème

► L'objectif est d'établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

### Notations

► On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P_n = 1 + X^{2n}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{P_n(x)}$.

► Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\alpha_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $x_k = e^{i\alpha_k}$.

### Préliminaires techniques

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient $a$ et $b$ deux réels, tels que $\sin\dfrac{b}{2} \neq 0$. Établir :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin(a+kb) = \sin\Big(a + \frac{(n+1)b}{2}\Big) \times \frac{\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé, à racines simples. Soient $(\xi_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ les racines de $P$. Explicitez la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P}$.

**Étude de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$**

$\boxed{\text{Q3}}$ Justifiez la convergence de l'intégrale $I_n$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Avec une majoration *très simple*, déterminez la limite de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}$ quand $n\to\infty$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Calculez la limite de $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^{2n}}$ quand $n\to\infty$, en déduire celle de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

**Décomposition de $\dfrac{1}{P_n}$**

$\boxed{\text{Q6}}$ Explicitez les racines de $P_n$ avec les notations de l'énoncé.

$\boxed{\text{Q7}}$ Écrivez la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P_n}$ dans $\mathbb{C}(X)$ sous la forme la plus simple possible.

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P_n}$ dans $\mathbb{R}(X)$ ; vous ne ferez intervenir dans l'expression finale que des nombres réels.

$\boxed{\text{Q9}}$ Écrivez la décomposition précédente sous la forme $\displaystyle\frac{1}{P_n}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\lambda_k(X-\cos\alpha_k)+\mu_k}{X^2-2\cos\alpha_k X+1}$. On explicitera $\lambda_k$ et $\mu_k$ en fonction de $n$ et de $\alpha_k$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Combien vaut $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\lambda_k$ ? *Remarque* : il existe deux méthodes pour établir le résultat…

**Calcul de $I_n$**

$\boxed{\text{Q11}}$ Pour $X>0$, calculez

$$J_n(X)=\int_0^X\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\lambda_k(x-\cos\alpha_k)}{x^2-2x\cos\alpha_k+1}dx$$

et déterminez $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}J_n(X)$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Soit $\alpha\in\,]0,\pi[$. Justifiez la convergence de $\displaystyle F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$, et calculez sa valeur.

$\boxed{\text{Q13}}$ Utilisez les résultats précédents pour montrer que $\displaystyle I_n=\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(\pi-\alpha_k)\sin\alpha_k$.

$\boxed{\text{Q14}}$ En notant que $\sin(\pi-t)=\sin t$, ramenez le calcul de la somme précédente à celui de $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\sin\alpha_k$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Achevez le calcul de $I_n$ et retrouvez la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.