

Exercice

► Nous dirons que a est un *pôle* de la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ si c'est une racine de $Q(X)$. Le *résidu* de $\frac{P(X)}{Q(X)}$ relatif à a est le coefficient de $\frac{1}{X-a}$ dans la décomposition de $\frac{P(X)}{Q(X)}$ en éléments simples.

Q1 Soit a un pôle double de la fraction rationnelle $\frac{N}{D}$. Montrez que le résidu relatif à a est donné par la formule :

$$\frac{6N'(a)D''(a) - 2N(a)D'''(a)}{3[D''(a)]^2}$$

Q2 Soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré n , scindé à racines simples. Notons x_1, \dots, x_n ses racines, supposées classées par ordre croissant : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Calculez le résidu α_k de $\frac{(X^2 + 1)^n}{P_n^2(X)}$ relatif à x_k .

Q3 Donnez l'allure de la décomposition en éléments simples de $\frac{(X^2 + 1)^n}{P_n^2(X)}$; on ne vous demande pas de calculer le coefficient de $\frac{1}{(X - x_k)^2}$.

Q4 Montrez que $\int \frac{(x^2 + 1)^n}{P_n^2(x)} dx$ est rationnelle ssi le polynôme $Q_n = 2nXP'_n - (X^2 + 1)P''_n$ est multiple de P_n .

Q5 Précisez le degré et le coefficient dominant de Q_n , en déduire que la condition de la question précédente est vérifiée ssi P_n vérifie une équation différentielle du second ordre que vous écrirez.

Q6 Notons $P_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k$, avec $a_n = 1$. Écrivez les relations entre les coefficients a_k qui se déduisent de l'équation différentielle vérifiée par P_n . Explicitez a_k en fonction de n et de k , précisez la parité de P_n .

Q7 $\mathcal{I}m(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z . Montrez que $P_n = \frac{1}{(n+1)} \mathcal{I}m[(X+i)^{n+1}]$.

Q8 En déduire l'expression de x_k en fonction de k et de n .

Q9 Explicitez P_1, P_2, P_3 et P_5 .

Problème

► L'objectif est d'établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

Notations

► On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P_n = 1 + X^{2n}$ et $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{P_n(x)}$.

► Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $x_k = e^{i\alpha_k}$.

Préliminaires techniques

Q1 Soient a et b deux réels, tels que $\sin \frac{b}{2} \neq 0$. Établir :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \sin(a + kb) = \sin\left(a + \frac{(n+1)b}{2}\right) \times \frac{\sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

Q2 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé, à racines simples. Soient $(\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$ les racines de P . Explicitez la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$.

Étude de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$

Q3 Justifiez la convergence de l'intégrale I_n .

Q4 Avec une majoration *très simple*, déterminez la limite de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Q5 Calculez la limite de $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^{2n}}$ quand $n \rightarrow \infty$, en déduire celle de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

Décomposition de $\frac{1}{P_n}$

Q6 Explicitez les racines de P_n avec les notations de l'énoncé.

Q7 Écrivez la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P_n}$ dans $\mathbb{C}(X)$ sous la forme la plus simple possible.

Q8 En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P_n}$ dans $\mathbb{R}(X)$; vous ne ferez intervenir dans l'expression finale que des nombres réels.

Q9 Écrivez la décomposition précédente sous la forme $\frac{1}{P_n} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\lambda_k(X - \cos \alpha_k) + \mu_k}{X^2 - 2 \cos \alpha_k X + 1}$. On explicitera λ_k et μ_k en fonction de n et de α_k .

Q10 Combien vaut $\sum_{1 \leq k \leq n} \lambda_k$? *Remarque* : il existe deux méthodes pour établir le résultat...

Calcul de I_n

Q11 Pour $X > 0$, calculez

$$J_n(X) = \int_0^X \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\lambda_k(x - \cos \alpha_k)}{x^2 - 2x \cos \alpha_k + 1} dx$$

et déterminez $\lim_{X \rightarrow +\infty} J_n(X)$.

Q12 Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Justifiez la convergence de $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$, et calculez sa valeur.

Q13 Utilisez les résultats précédents pour montrer que $I_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} (\pi - \alpha_k) \sin \alpha_k$.

Q14 En notant que $\sin(\pi - t) = \sin t$, ramenez le calcul de la somme précédente à celui de $\sum_{1 \leq k \leq n} \sin \alpha_k$.

Q15 Achevez le calcul de I_n et retrouvez la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.