Exercice 1

► Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Nous voulons établir l'existence de $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}^4\big([x-h, x+h], \mathbb{R}\big)$, il existe $\theta \in \left]-1, +1\right[$ vérifiant :

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = h^2 f''(x) + kh^4 f^{(4)}(x+\theta h)$$

Q1 En utilisant la fonction $\lambda : t \in [-1, +1] \mapsto \lambda(t) = x + th$, prouvez qu'il suffit d'établir l'existence de $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}^4\big([-1, +1], \mathbb{R}\big)$, il existe $\theta \in \left]-1, +1\right[$ vérifiant :

$$f(1) - 2f(0) + f(-1) = f''(0) + kf^{(4)}(\theta)$$

Q2 Supposons établie l'existence de k ; en choisissant pour f une fonction polynôme aussi simple que judicieuse, prouvez que $k = \dfrac{1}{12}$.

Q3 Soit Φ la fonction qui, à $P \in \mathbb{R}_4[X]$, associe :

$$\Phi(P) = \Big(\widetilde{P}(-1), \widetilde{P}(0), \widetilde{P}(1), \widetilde{P'}(0), \widetilde{P''}(0)\Big)$$

Prouvez que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ sur $\mathbb{R}^5$, ce dernier étant muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v.

Q4 Soit $(p, q, r, s, t) \in \mathbb{R}^5$. Donnez l'expression de $\Phi^{-1}(p, q, r, s, t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

Q5 Soit $f \in \mathcal{C}^4\big([-1, +1], \mathbb{R}\big)$ et $P = \Phi^{-1}\big(f(-1), f(0), f(1), f'(0), f''(0)\big)$. Notons $g = f - P$. En appliquant répétitivement le théorème de Rolle, établissez l'existence de $\theta \in \left]-1, +1\right[$ tel que $g^{(4)}(\theta) = 0$ et concluez.

Exercice 2

► Définissons une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_n(X) = \dfrac{X(X-n)^{n-1}}{n!}$ pour tout $n \geqslant 2$.

Q1 Établissez $P'_{n+1}(X) = P_n(X-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q2 Calculez $\widetilde{P'_n}(1)$ pour $n > 1$, et $\widetilde{P'_1}(1)$.

Q3 Prouvez que $\widetilde{P''_n}(2) = 0$ pour $n > 2$.

Q4 Prouvez que $\widetilde{P_n^{(k)}}(k) = 0$ pour $n > k$.

Q5 Prouvez que $P_n^{(n)} = 1$, et que $P_n^{(k)} = 0$ pour $k > n$.

Q6 Prouvez que, pour tout élément Q de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe une et une seule famille $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de réels telle que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$.

Q7 Prouvez que $\lambda_k = \widetilde{Q^{(k)}}(k)$.

Q8 En déduire $\widetilde{P_n}(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \widetilde{P_k}(x)\widetilde{P_{n-k}}(y)$ pour tout couple (x, y) de réels.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

▶ Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, et notons $s_k = X^k$ et $S_k = X^k(1-X)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, avec la convention $X^0 = (1-X)^0 = 1$. La famille $(s_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est donc la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $j = k$, à 0 sinon.

$\boxed{\text{Q1}}$ ⋆⋆ Prouvez que $(S_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Exprimez S_k dans la base $(s_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Exprimez s_k dans la base $(S_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$. Indication : $1 = X + (1-X)$.

▶ Notons $\mathbf{T}_n$ la fonction qui, à $P \in \mathbb{R}_n[X]$, associe $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P\Big(\frac{k}{n}\Big) S_k$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Prouvez que $\mathbf{T}_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Calculez $\mathbf{T}_n(s_0)$ et $\mathbf{T}_n(s_1)$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Prouvez que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe un et un seul $F_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $F_k\Big(\dfrac{j}{n}\Big) = \delta_{j,k}$ pour tout $j \in [\![0,n]\!]$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Explicitez F_k.

$\boxed{\text{Q8}}$ Calculez $\mathbf{T}_n(F_k)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Prouvez que $\mathbf{T}_n$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $Q = XP$. Établissez la formule $\dfrac{X(1-X)}{n}\big(\mathbf{T}_n(P)\big)' + X\,\mathbf{T}_n(P) = \mathbf{T}_n(Q)$.

$\boxed{\text{Q11}}$ En déduire $\mathbf{T}_n(s_2)$ et $\mathbf{T}_n(s_3)$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Prouvez que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbf{T}_n(s_k)$ est de degré k.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez que $\mathbf{T}_n$ induit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.