Exercice 1

▶ E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n.

Q1 Soient u et v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Établissez :

$$\dim\big(u\big(\ker(v\circ u)\big)\big) = \dim\big(\ker(v\circ u)\big) - \dim\big(\ker u\big) = \operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v\circ u)$$

▶ Soient f, g et h trois éléments de $\mathcal{L}(E)$. Nous voulons établir $\operatorname{rg}(f\circ g) + \operatorname{rg}(g\circ h) \leqslant \operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(f\circ g\circ h)$.

Q2 Montrez qu'il existe des naturels p et q, et une base $(e_1,\dots,e_{p+q})$ de $\ker(f\circ g\circ h)$ tels que $(e_1,\dots,e_p)$ soit une base de $\ker(g\circ h)$. *Vous pouvez supposer que p et q sont tous deux non nuls.*

Q3 Montrez que $\big((g\circ h)(e_{p+1}),\dots,(g\circ h)(e_{p+q})\big)$ est une famille libre de $g\big(\ker(f\circ g)\big)$.

Q4 Prouvez alors $\dim\big(\ker(f\circ g\circ h)\big) - \dim\big(\ker(g\circ h)\big) \leqslant \dim\big(\ker(f\circ g)\big) - \dim\big(\ker(g)\big)$ et concluez.

Q5 Soit u un élément de $\mathcal{L}(E)$. On rappelle que la suite des $\operatorname{im} u^k$ est décroissante. Établissez la convexité de cette suite, autrement dit : $2\operatorname{rg}\big(u^{k+1}\big) \leqslant \operatorname{rg}\big(u^k\big) + \operatorname{rg}\big(u^{k+2}\big)$, pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Exercice 2

▶ Notons $f : x\in\,]0,+\infty[\,\mapsto e^{-1/x}$.

Q1 Montrez que f peut être prolongée par continuité en 0. Notons encore f le prolongement ainsi obtenu ; montrez que f est dérivable sur $[0,+\infty[$, et précisez $f'_d(0)$.

Q2 Pour $x>0$ et $n\geqslant 1$, établissez la relation

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}}e^{-1/x}$$

où P_{n-1} est une fonction polynôme de degré $n-1$. Vous écrirez une relation liant P_n à P_{n-1} et P'_{n-1}. Combien vaut $P_n(0)$? Explicitez le coefficient dominant a_{n-1} de P_{n-1}.

Q3 En déduire que $f\in\mathcal{C}^\infty\big([0,+\infty[,\mathbb{R}\big)$, explicitez $f_d^{(n)}(0)$.

Q4 A partir d'une relation très simple entre $f(x)$ et $f'(x)$, établissez $P'_n = -n(n+1)P_{n-1}$ pour $n\geqslant 2$.

Q5 En déduire une relation entre P_{n-1}, P'_{n-1} et P''_{n-1}. Notant alors $P_{n-1}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1}$, donnez l'expression de α_k pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, et retrouvez ainsi la valeur de a_{n-1}.

▶ On rappelle le théorème de Rolle généralisé : si une fonction φ de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est continue sur $[a,+\infty[$, dérivable dans $]a,+\infty[$, et vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \varphi(a)$, alors il existe $c\in\,]a,+\infty[$ tel que $\varphi'(c)=0$.

Q6 Montrez que, pour $n\geqslant 2$, P_{n-1} possède $n-1$ racines réelles, deux à deux distinctes, toutes dans $]0,+\infty[$, et que, pour $n\geqslant 3$, ces racines sont séparées par celles de P_{n-2}.

Q7 Notons ζ_n la plus petite racine réelle de P_n. En observant $P_n\left(\dfrac{1}{2n}\right)$, déterminez la limite de la suite $(\zeta_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 3

▶ Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie $n\geqslant 2$ et $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E. Fixons $p\in[\![1,n-1]\!]$, et notons $\mathrm{F} = \operatorname{Vect}\{e_1,e_2,\dots,e_p\}$ et $\mathrm{G} = \operatorname{Vect}\{e_{p+1},e_{p+2},\dots,e_n\}$.

Q1 Que pouvez-vous dire des deux s.e.v. F et G ?

▶ Pour $a\in E$, nous noterons $\mathrm{H}_a = \operatorname{Vect}\{e_1+a, e_2+a,\dots,e_p+a\}$.

Q2 Montrez que, si a appartient à G, alors H_a et G sont supplémentaires.

▶ Fixons deux éléments a et b de G.

Q3 Montrez que, si e_1+b appartient à H_a, alors $a=b$.

Q4 En déduire une CNS portant sur a et b pour que $\mathrm{H}_a = \mathrm{H}_b$.

▶ Désormais, a et b sont deux éléments de G distincts.

Q5 Montrez que $\mathrm{H}_a\cap\mathrm{H}_b = \mathrm{H}_c$, où $c=-e_p$.

Q6 Déterminez la dimension de H_c.

Q7 Donnez un supplémentaire simple de H_c.