

**Exercice 1**

►  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie  $n$ .

Q1 Soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $\mathcal{L}(E)$ . Établissez :

$$\dim(u(\ker(v \circ u))) = \dim(\ker(v \circ u)) - \dim(\ker u) = \operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v \circ u)$$

► Soient  $f, g$  et  $h$  trois éléments de  $\mathcal{L}(E)$ . Nous voulons établir  $\operatorname{rg}(f \circ g) + \operatorname{rg}(g \circ h) \leq \operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(f \circ g \circ h)$ .

Q2 Montrez qu'il existe des naturels  $p$  et  $q$ , et une base  $(e_1, \dots, e_{p+q})$  de  $\ker(f \circ g \circ h)$  tels que  $(e_1, \dots, e_p)$  soit une base de  $\ker(g \circ h)$ . Vous pouvez supposer que  $p$  et  $q$  sont tous deux non nuls.

Q3 Montrez que  $((g \circ h)(e_{p+1}), \dots, (g \circ h)(e_{p+q}))$  est une famille libre de  $g(\ker(f \circ g))$ .

Q4 Prouvez alors  $\dim(\ker(f \circ g \circ h)) - \dim(\ker(g \circ h)) \leq \dim(\ker(f \circ g)) - \dim(\ker(g))$  et concluez.

Q5 Soit  $u$  un élément de  $\mathcal{L}(E)$ . On rappelle que la suite des  $\operatorname{im} u^k$  est décroissante. Établissez la convexité de cette suite, autrement dit :  $2 \operatorname{rg}(u^{k+1}) \leq \operatorname{rg}(u^k) + \operatorname{rg}(u^{k+2})$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 2**

► Notons  $f : x \in ]0, +\infty[ \mapsto e^{-1/x}$ .

Q1 Montrez que  $f$  peut être prolongée par continuité en 0. Notons encore  $f$  le prolongement ainsi obtenu ; montrez que  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ , et précisez  $f'_d(0)$ .

Q2 Pour  $x > 0$  et  $n \geq 1$ , établissez la relation

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$$

où  $P_{n-1}$  est une fonction polynôme de degré  $n - 1$ . Vous écrirez une relation liant  $P_n$  à  $P_{n-1}$  et  $P'_{n-1}$ . Combien vaut  $P_n(0)$  ? Explicitez le coefficient dominant  $a_{n-1}$  de  $P_{n-1}$ .

Q3 En déduire que  $f \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$ , explicitez  $f_d^{(n)}(0)$ .

Q4 A partir d'une relation très simple entre  $f(x)$  et  $f'(x)$ , établissez  $P'_n = -n(n+1)P_{n-1}$  pour  $n \geq 2$ .

Q5 En déduire une relation entre  $P_{n-1}$ ,  $P'_{n-1}$  et  $P''_{n-1}$ . Notant alors  $P_{n-1}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$ , donnez l'expression de  $\alpha_k$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , et retrouvez ainsi la valeur de  $a_{n-1}$ .

► On rappelle le théorème de ROLLE généralisé : si une fonction  $\varphi$  de  $[a, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  est continue sur  $[a, +\infty[$ , dérivable dans  $]a, +\infty[$ , et vérifie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \varphi(a)$ , alors il existe  $c \in ]a, +\infty[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ .

Q6 Montrez que, pour  $n \geq 2$ ,  $P_{n-1}$  possède  $n - 1$  racines réelles, deux à deux distinctes, toutes dans  $]0, +\infty[$ , et que, pour  $n \geq 3$ , ces racines sont séparées par celles de  $P_{n-2}$ .

Q7 Notons  $\zeta_n$  la plus petite racine réelle de  $P_n$ . En observant  $P_n\left(\frac{1}{2n}\right)$ , déterminez la limite de la suite  $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ .

**Exercice 3**

► Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie  $n \geq 2$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Fixons  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , et notons  $F = \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  et  $G = \operatorname{Vect}\{e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n\}$ .

Q1 Que pouvez-vous dire des deux s.e.v.  $F$  et  $G$  ?

► Pour  $a \in E$ , nous noterons  $H_a = \operatorname{Vect}\{e_1 + a, e_2 + a, \dots, e_p + a\}$ .

Q2 Montrez que, si  $a$  appartient à  $G$ , alors  $H_a$  et  $G$  sont supplémentaires.

► Fixons deux éléments  $a$  et  $b$  de  $G$ .

Q3 Montrez que, si  $e_1 + b$  appartient à  $H_a$ , alors  $a = b$ .

Q4 En déduire une CNS portant sur  $a$  et  $b$  pour que  $H_a = H_b$ .

► Désormais,  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $G$  distincts.

Q5 Montrez que  $H_a \cap H_b = H_c$ , où  $c = -e_p$ .

Q6 Déterminez la dimension de  $H_c$ .

Q7 Donnez un supplémentaire simple de  $H_c$ .