

Exercice

- Q1 Montrez qu'une fonction f d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est uniformément continue si, et seulement si, pour toutes suites (a_n) et (b_n) d'éléments de I , $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ implique $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n) - f(b_n)) = 0$.
- Q2 Soient f et g deux fonctions bornées et uniformément continues d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrez que fg est elle-même uniformément continue.
- Q3 Soit f une fonction d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $\varepsilon > 0$. Un réel $\alpha \geq 0$ est un *module de continuité uniforme* de f relatif à ε si :

$$\forall (x, y) \in I^2 : |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Notons $M_\varepsilon(f)$ l'ensemble des modules de continuité uniforme de f relatifs à ε . Montrez que $M_\varepsilon(f)$ est, soit égal à $[0, +\infty[$, soit égal à $[0, A]$ pour un certain réel $A \geq 0$.

Problème

- Notons E le \mathbb{R} -e.v. des suites de réels. À toute suite u , nous associons la suite Su définie par $(Su)_n = u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une suite u est dite *périodique* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; nous dirons alors que p est une *période* de u .
- Q1 Montrez que S est un endomorphisme de E . Est-il injectif? Montrez que le noyau de S est une droite vectorielle.
- Q2 Montrez que S est surjectif; plus précisément, prouvez que, pour une suite $v \in E$ donnée, il existe une et une seule suite u telle que $u_0 = 0$ et $Su = v$; vous explicitez u_n en fonction de terme de la suite v .
- Q3 Montrez que l'on peut parler de la plus petite période p_u d'une suite u périodique, et que l'ensemble des périodes de u est l'ensemble des multiples de p_u dans \mathbb{N}^* .
- Q4 Montrez que l'ensemble P des suites périodiques est un s.e.v. de E , et qu'il est stable par S . Si Su est périodique, u est-elle nécessairement périodique? Montrez que, si u est bornée et Su périodique, alors u est elle-même périodique.
- Q5 Notons S^k le k -ième itéré de S , défini par $S^0 = Id_E$, et $S^{k+1} = S^k \circ S$. Soit $u \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimez $(S^k u)_n$ en fonction de termes de la suite u .
- Notons *APCR* pour *à partir d'un certain rang*. Une suite u est dite *périodique APCR* s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_{n+p} = u_n$; nous dirons que p est une *période* de u APCR. Notons Q l'ensemble des suites périodiques APCR.
- Q6 Montrez que Q est un s.e.v. de E . Est-il stable par S ?
- Q7 Montrez que si une suite u est périodique APCR, il existe un indice $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_q = u_{2q}$. Réciproquement, supposons que u est définie par la donnée de son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction de \mathbb{R} dans lui-même; montrez que, s'il existe un indice $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_q = u_{2q}$, alors u est périodique APCR.
- Q8 Soit f une fonction de \mathbb{R} dans lui-même, et $u_0 \in \mathbb{R}$. Nous souhaitons programmer la recherche d'une période APCR de la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Nous définissons un type `Nombre`, qui pourra être, selon les besoins, le type `integer` ou le type `real`. Nous disposons d'une fonction écrite en Pascal :
- ```
1 fonction f(x:Nombre):Nombre;
```
- qui réalise le calcul de  $f(x)$ . Rédigez un programme qui applique la méthode exposée à la question précédente, pour déterminez une période APCR de la suite  $u$  définie par la donnée de  $u_0$ . Vous vous interdirez tout stockage superflu de termes de la suite  $u$ ; en particulier, l'emploi de `array` est interdit. Comment faire pour déterminer ensuite la plus petite période APCR?
- Q9 Êtes-vous certain, avec le programme précédent, de trouver une *vraie* période de  $u$ , si cette suite est périodique APCR? Si le type `Nombre` désigne en fait le type `real`, quel(s) autre(s) problème(s) risquez-vous de rencontrer? Prouvez que la suite  $\tilde{u}$  calculée par l'ordinateur est nécessairement périodique APCR.