$\boxed{\text{HX4 — Contrôle 1992/05}}$

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

$\boxed{\text{Q1}}$ Étudiez l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arccos\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{2}} - \arcsin\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ et tracez sa courbe représentative.

$\boxed{\text{Q2}}$ Calculez $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\,dt$.

$\boxed{\text{Q3}}$ *Cette question n'a aucun rapport avec les précédentes.* Calculez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

Exercice 2

▶ Pour $n \geqslant 2$, notons $f_n : x \geqslant 0 \mapsto x^n - nx - 1$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Prouvez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$.

▶ Cette solution sera désormais notée x_n.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $x_n > 1$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Prouvez que $x_n < 3$ pour tout $n \geqslant 2$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Prouvez que $x_n < 2$ pour tout $n \geqslant 3$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établissez $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant n+1$.

$\boxed{\text{Q6}}$ En déduire $x_n > 1 + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 2$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Étudiez la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$, puis établissez la convergence de cette suite.

$\boxed{\text{Q8}}$ Déterminez $\ell = \displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$.

▶ Pour $n \geqslant 2$, notons $\varepsilon_n = x_n - 1$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez que $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 3

▶ Notons $F = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ et $A = F \times F$. On rappelle que $(F, +, \times)$ est un corps. Pour alléger les écritures, vous pourrez noter k au lieu de $\overline{k}$, mais uniquement lorsque $k \in [\![0,10]\!]$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Résolvez dans F l'équation $x^2 = 7$.

▶ Munissons A de deux lois notées $+$ et $\times$, définies respectivement par $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ et $(a,b)\times(c,d) = (ac+7bd, ad+bc)$, pour tous éléments (a,b) et (c,d) de A. Nous savons que $(A,+)$ est un groupe abélien (on ne demande pas de le prouver).

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $(A, +, \times)$ est un corps.

$\boxed{\text{Q3}}$ Résolvez dans A l'équation $(x,y)^2 = (7,0)$.

▶ Un corps $\mathbb{K}$ est dit *quadratiquement clos* si toute équation du second degré $x^2+px+q = 0$, avec $(p,q) \in \mathbb{K}^2$, a au moins une solution dans $\mathbb{K}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Le corps A est-il quadratiquement clos ?

$\boxed{\text{Q5}}$ À quelle catégorie de corps le raisonnement tenu à la question précédente s'applique-t-il ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Résolvez dans F l'équation $x^3 = 5$.