

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourrent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie.** Qu'on se le dise.

### Exercice 1

► Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . On note  $f^{(0)} = Id_{\mathbb{R}}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}$ . En particulier,  $f^{(1)} = f$ .

Q1 Prouvez que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n+1)} = f^{(n)} \circ f$ .

► Nous supposons, dans la suite de cet exercice, que  $f$  vérifie  $f^{(2)}(x) = 2f(x) - x$  pour tout réel  $x$ .

Q2 Exprimez  $f^{(3)}(x)$  et  $f^{(4)}(x)$  en fonction de  $x$  et de  $f(x)$ .

Q3 Établissez une formule générale exprimant  $f^{(n)}(x)$  en fonction de  $n$ ,  $x$  et  $f(x)$ .

Q4 Prouvez que  $f$  est injective.

Q5  $f$  peut-elle être strictement décroissante ?

### Exercice 2

► On note  $p \wedge q$  le PGCD de deux naturels  $p$  et  $q$ .

Q1 Prouvez qu'un naturel premier  $p$  divise le produit  $a_1 a_2 \dots a_n$  de  $n$  naturels si et seulement si il divise l'un au moins de ces naturels.

Q2 Montrez que deux naturels  $a$  et  $b$  sont étrangers si et seulement si  $a^2 + b^2$  et  $ab$  le sont.

Q3 Soient  $a$  et  $b$  deux naturels (non nécessairement étrangers). Établissez une relation entre  $a \wedge b$  et  $(a^2 + b^2) \wedge (ab)$ .

### Exercice 3

Q1 Soit  $(A, +, \times)$  un anneau ; prouvez que l'ensemble  $G$  des éléments de  $A$  inversibles pour la loi  $\times$  est un groupe, pour cette loi.

►  $G$  désigne désormais le groupe des inversibles de l'anneau  $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ .

Q2 Énumérez les éléments de  $G$ , et dressez sa table de multiplication.

Q3 Quels sont les sous-groupes de  $(G, \times)$  ?

Q4 A quel(s) groupe(s) bien connu(s)  $(G, \times)$  est-il isomorphe ?

Q5 Exhibez un groupe d'ordre 6 non commutatif.

### Exercice 4

► Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on définit  $A_\varepsilon$  par :  $x \in A_\varepsilon$  ssi  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset A$ .

Q1 Explicitez  $A_\varepsilon$  lorsque  $A = ]a, b[$ . Vous distinguerez plusieurs cas.

Q2 Prouvez que, si  $\varepsilon < \alpha$ , alors  $A_\alpha \subset A_\varepsilon$ . La réciproque est-elle vraie ?

Q3 Prouvez que, si  $A \subset B$ , alors  $A_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ .

Q4 Établissez  $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = (A \cap B)_\varepsilon$ .

Q5 Établissez  $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \subset (A \cup B)_\varepsilon$ . Donnez un exemple où cette inclusion est stricte.

Q6 Prouvez que les ensembles  $\tilde{A} = \bigcup_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$  et  $\hat{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{1/n}$  sont tous deux égaux à  $\overset{\circ}{A}$ .

Q7 Si  $A$  est ouvert,  $A_\varepsilon$  est-il nécessairement ouvert ?