

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourrent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie.** Qu'on se le dise.

### Exercice 1 : nombre de surjections

- On note  $S_{n,p}$  le nombre de surjections de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .
- Q1 Déterminez  $S_{n,1}$ ,  $S_{n,n}$  et  $S_{n,p}$  pour  $p > n$ .
- Q2 Prouvez que  $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$ .
- Q3 En déduire que  $S_{n+1,n} = \frac{n}{2}(n+1)!$  et que  $S_{n+2,n} = \frac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$ .
- Q4 Dressez un tableau donnant la valeur de  $S_{n,p}$  pour  $(n,p) \in \llbracket 1, 5 \rrbracket^2$ .
- Q5 Établissez  $S_{n,p} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n$ .

### Exercice 2 : une transformation du plan complexe

- Nous considérons la fonction  $t$  qui, au complexe  $z \neq -1$ , associe  $t(z) = \frac{z-1}{z+1}$ . Notons  $A$  le point du plan complexe d'affixe 1,  $A'$  celui d'affixe -1.  $\mathcal{P}$  désigne le plan complexe, son origine est  $O$ . Notons  $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{O, A, A'\}$ .  $T$  désigne la fonction de  $\mathcal{P} \setminus \{A'\}$  dans  $\mathcal{P}$  qui, au point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = t(z)$ .
- Q1 Déterminez  $T(\mathcal{P} \setminus \{A'\})$ , et montrez que  $T$  est une bijection de  $\mathcal{P} \setminus \{A'\}$  sur  $T(\mathcal{P} \setminus \{A'\})$ .
- Q2 Notons  $\tau$  la restriction de  $T$  à  $\mathcal{P}^*$ . Montrez que  $\tau$  est une bijection de  $\mathcal{P}^*$  sur lui-même.
- Q3 Explicitez  $\tau^2 = \tau \circ \tau$ ,  $\tau^3 = \tau \circ \tau \circ \tau$ , et plus généralement le  $n$ -ième itéré  $\tau^n$  de  $\tau$ .
- Q4 Montrez que  $T$  admet exactement deux points invariants  $I$  et  $J$ . Prouvez que, pour  $z \neq -i$ , la relation  $z' = t(z)$  est équivalente à  $\frac{z'-i}{z'+i} = -i \frac{z-i}{z+i}$ .
- Q5 Retrouvez ainsi l'expression de  $\tau^n$  lorsque  $n$  est multiple de 4.
- Q6 Pour  $M \notin \{I, J, A'\}$ , comparez les angles de vecteurs  $(\overrightarrow{M'J}, \overrightarrow{M'I})$  et  $(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MI})$ .
- Q7 En déduire l'image par  $T$  d'un cercle passant par  $I$  et  $J$ ; précisez l'image du cercle de diamètre  $[IJ]$ .

### Exercice 3 : une suite de réels

- Q1 Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels converge vers 0. Montrez qu'il en est de même pour la suite de terme général  $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ .
- Q2 Déduire de la question précédente que, si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels converge vers  $\ell$ , il en est de même pour la suite de terme général  $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ .
  - Nous considérons désormais la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels définie par la donnée de son premier terme  $u_0$ , et la relation de récurrence  $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ , valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Q3 Discutez, en fonction de  $u_0$ , la convergence et la limite de cette suite.
  - Nous supposons maintenant que  $u_0 \in ]-1, 0[$ .
- Q4 Montrez que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$  converge vers -1.
- Q5 En déduire un équivalent simple de  $u_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ .