$\boxed{\text{HX4 — Contrôle 1992/02}}$

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice

► Notons $f : x > 0 \mapsto x - \ln(x)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ possède une et une seule solution dans $[1, +\infty[$, solution que nous noterons x_n dans la suite. Comparez x_n et n, puis x_n et $n + \ln(n)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ En étudiant brièvement la fonction $\varphi : x > 0 \mapsto x^2 - x - 2\ln(x)$, prouvez que $f\big(n + 2\ln(n)\big) \geqslant n$. En déduire $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Donnez un équivalent simple de $\alpha_n = x_n - n$, puis de $\beta_n = x_n - n - \ln(n)$ quand $n \to \infty$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Notons $\delta_n = 1 - \big(\sqrt[n]{n}\big)^{-1}$. Donnez un équivalent simple de δ_n quand $n \to \infty$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Pour $u \geqslant 0$, établissez : $-u + \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^3}{6} \leqslant e^{-u} - 1 \leqslant -u + \dfrac{u^2}{2}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ En exploitant l'encadrement précédent, prouvez que $\dfrac{\ln(n)}{n} - \delta_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{2n^2}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire un équivalent simple de $\gamma_n = x_n - n - \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n}$ quand $n \to \infty$.

Problème

► À l'exception de Q3, qui est une application directe du cours, aucune question ne requiert plus d'une dizaine de lignes manuscrites pour sa réponse.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$. Prouvez que la relation $u_{n+2} = \dfrac{{u_{n+1}}^2 + {u_n}^2}{u_{n+1} + u_n}$ permet de définir une suite (u_n) de réels, tous strictement positifs.

$\boxed{\text{Q2}}$ Étudiez le cas où $u_0 = u_1$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Supposons $u_0 < u_1$. Montrez que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

$\boxed{\text{Q4}}$ En déduire la convergence de la suite (u_n), et montrez que la limite ℓ de cette suite appartient à $]u_0, u_1[$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Quel énoncé a-t-on lorsque $u_0 > u_1$? *Remarque* : on ne demande pas de le démontrer.

► Notons $\lambda(u_0, u_1)$ la limite de la suite définie par u_0 et u_1.

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $k > 0$. Quelle relation existe-t-il entre $\lambda(ku_0, ku_1)$ et $\lambda(u_0, u_1)$?

► Pour $x > 0$, notons $f(x) = \lambda(1, x)$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Prouvez que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Établissez la formule $f(x) = xf\Big(\dfrac{x^2+1}{x^2+x}\Big)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ En déduire $\mu \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\mu x^\alpha} = 1$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Fixons $u_0 = 1$ et $u_1 = x \in]0,1[$. Explicitez u_2 et u_3 en fonction de x.

$\boxed{\text{Q11}}$ En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Précisez le signe de $f(x) - x$, puis celui de $f(x) - x + 1$, en fonction de x.

$\boxed{\text{Q13}}$ Que pouvez-vous en déduire concernant la courbe représentative de f ?

$\boxed{\text{Q14}}$ Admettons que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Avec ces hypothèses, et les résultats établis auparavant, indiquez l'allure de la courbe représentative de f, en supposant que celle-ci est « la plus simple possible ».

► On note désormais $\varphi : x > 0 \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+x}$. Pour $n \geqslant 1$, on note φ^n la n-ième itérée de l'application φ ; elle est définie par $\varphi^1 = \varphi$, et $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n = \varphi^n \circ \varphi$ pour tout $n \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Établissez : $f(x) = xf\big[\varphi^{n+1}(x)\big] \prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \varphi^k(x)$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Étudiez *rapidement* les variations de φ.

$\boxed{\text{Q17}}$ Soit $x_0 > 0$, et $x_n = \varphi^n(x_0)$ pour $n \geqslant 1$. Établissez, pour $n \geqslant 1$: $|x_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|x_n - 1|$. En déduire la convergence et la limite de la suite (x_n).

$\boxed{\text{Q18}}$ Pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$, on note $P_n(x) = \prod\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \varphi^k(x)$. Déduisez de ce qui précède la convergence et la limite de la suite de terme général $P_n(x)$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Prouvez que la suite de fonctions $(\varphi^n)_{n \geqslant 2}$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, autrement dit :

$$\exists M \geqslant 0 : \forall n \geqslant 2 : \forall x > 0 : \big|\varphi^n(x)\big| \leqslant M$$

Vous expliciterez la meilleure constante M possible.

$\boxed{\text{Q20}}$ Rédigez une fonction Pascal, qui prend en entrée $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, et calcule $f(x)$ avec une erreur inférieure à ε. L'en-tête de cette fonction doit-être :

```
function f(x,epsilon:real):real;
```

$\boxed{\text{Q21}}$ Utilisez la fonction que vous venez d'écrire pour tracer la courbe représentative de f.

$\boxed{\text{Q22}}$ Prouvez que la suite de fonctions $(\varphi^n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction constante égale à 1, autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \geqslant 1 : \forall x > 0 : \big|\varphi^n(x) - 1\big| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{Q23}}$ Pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$, on note $S_n(x) = \ln\big[P_n(x)\big]$. Prouvez que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur toute partie compacte de $\mathbb{R}_+^*$. En déduire la continuité de f.