Exercice 1

▶ Notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x ; elle est donc définie par $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Prouvez que $x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor \Rightarrow x < y$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, établissez l'inégalité $\left\lfloor \frac{\lfloor xy \rfloor}{y} \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor$; montrez que, si $y \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité.

$\boxed{\text{Q3}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, établissez l'inégalité $\left\lfloor \dfrac{x}{abc} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{1}{a} \left\lfloor \dfrac{1}{b} \left\lfloor \dfrac{x}{c} \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor$.

Exercice 2

▶ Notons $f : x > 0 \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{4} - \dfrac{1}{2} \ln(x)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Étudiez les variations de f et construisez sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminez la place de $\mathcal{C}$ par rapport à la parabole Γ d'équation $y = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Calculez $I(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$ pour $x \in \,]0, 1]$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Calculez $\ell = \displaystyle\lim_{x \to 0^+} I(x)$. Quelle est la signification géométrique de ℓ ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Calculez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. Vous pourrez utiliser l'égalité $k^2 = \dfrac{(k+1)^3 - k^3 - 3k - 1}{3}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Simplifiez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$. Vous ferez apparaître $n!$ et n^n.

$\boxed{\text{Q7}}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établissez l'encadrement $\displaystyle\int_{1/n}^{1} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \leqslant \frac{1}{n} f\Big(\frac{1}{n}\Big) + \int_{1/n}^{1} f(t)\,dt$. Remarque : la somme qui intervient ici n'est pas une somme de Riemann.

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln\Big(\frac{n^n}{n!}\Big) = 1$.

Exercice 3

▶ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $I_n = \displaystyle\int_0^n x^n e^{-x}\,dx$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Calculez I_1 et I_2.

$\boxed{\text{Q2}}$ Aau moyen d'un changement de variable, établissez la formule $I_n = n^n e^{-n} \displaystyle\int_0^n e^t \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n dt$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Pour $x \in [0, 1[$, établissez l'inégalité $\ln(1-x) \leqslant -x - \dfrac{x^2}{2}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ En déduire, pour $t \in [0, n]$, l'inégalité $e^t \Big(1 - \dfrac{t}{n}\Big)^n \leqslant e^{-\frac{t^2}{2n}}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Établissez l'inégalité $\dfrac{e^n}{n^n} I_n \leqslant \sqrt{2n} \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-u^2}\,du$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Pour $u \geqslant 1$, établissez l'inégalité $e^{-u^2} \leqslant e^{-u}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{e^n}{n^{n+1}} I_n$.