Sup PCSI2 — Exercices : sommes

► Pour n et p naturels, on note $S_n^p = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^p$.

Q1 Développez $Q = \sum_{3\leqslant k\leqslant 6} \frac{2k}{k^2+1}$, et écrivez Q sous forme irréductible.

Q2 Donez une expression simple de $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Q3 Trouvez au moins cinq méthodes différentes pour obtenir une expression simple de la somme $U_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ des n premiers naturels impairs.

Q4 Écrivez $S_n = \frac{2\cdot 3}{2^2-1} + \frac{3\cdot 4}{3^2-1} + \cdots + \frac{n(n+1)}{n^2-1}$ au moyen d'une $\sum$. Simplifiez le terme général, puis exprimez S_n en fonction d'un terme de la suite de terme général $H_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}$.

Q5 Donez une expression simple de $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \ln\Big(1 + \frac{2}{k(k+3)}\Big)$.

Q6 Simplifiez $A_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k2^k$ puis $B_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k2^{n-k}$. Méthodes envisageables : utiliser la formule $k2^k = \frac{1}{2}(k+1)2^{k+1} - 2^k$; utiliser la dérivée de $x \mapsto \sum_{1\leqslant k\leqslant n} x^k$; exprimer $2A_n$ en fonction de A_{n+1}.

Q7 Exprimez $\frac{\sin(\beta)}{2\cos(\beta)-1} + \frac{\sin(\beta)}{2\cos(\beta)+1}$ en fonction de 2β, puis simplifiez $V_n(\alpha) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{2^k \sin(2^k\alpha)}{2\cos(2^k\alpha)-1}$. *Notez bien qu'il n'y a pas d'erreur (de signe, en particulier) dans cet énoncé.*

Q8 Retrouvez les formules pour transformer $\tan(\alpha)+\tan(\beta)$ et $\tan(\alpha)-\tan(\beta)$ puis mettez sous la forme la plus simple possible $W_n(x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{\cos(kx)\cos((k+1)x)}$.

Q9 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculez $I_n = \int_1^n \Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} |x-k|\Big)\,dx$. Indication : commencez par observer la courbe représentative de $x \in [1,n] \mapsto |x-k|$, pour $k \in [\![1,n]\!]$ fixé. Réponse : $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

Q10 Donnez une expression simple du terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = 3x_n + 2^{n+2} - 1$. Indication : observez la suite de terme général $y_n = 3^{-n}x_n$.

Q11 Donnez une expression simple de chacune des expressions

$$A_n = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \min(i,j) \qquad B_n = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \max(i,j) \qquad C_n = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |i-j| \qquad D_n = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}} ij$$

Indication : pour les trois premières sommes, observez un damier dont les cases sont marquées avec les valeurs à sommer. Pour D_n, combien la somme comporte-t-elle de termes ? Question complémentaire : en calculant C_n de deux façons différentes, exprimez S_n^2 en fonction de S_n^1.

Q12 Simplifiez $A(n,p) = (p-1)^{n-1}p + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} (p-1)^{k-1}p^{n-k}$ et $B(n,p) = n(p-1)^{n-1}p + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} k(p-1)^{k-1}p^{n-k}$. Quelle est la limite de $p^{-n}B(n,p)$ lorsque, pour $p \geqslant 1$ fixé, n tend vers l'infini ? Réponses : $A(n,p) = p^n$ et $B(n,p) = p\big(p^n - (p-1)^n\big)$.

Q13 Calculez la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sqrt{k}$. (Source : oral ENSI Physique P). Indication : minorez et majorez par des intégrales.

Q14 Evaluate the sum $\sum_{1\leqslant n\leqslant 1994} (-1)^n \frac{n^2+n+1}{n!}$. (Canadian Mathematical Olympiad 1994)

$\boxed{\text{Q15}}$ (Canadian Mathematical Olympiad 1974) Show that, for all positive integers n,

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^n(n-1)^2 + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + \cdots + n)$$