Sup PCSI 2 — Exercices : l'ordre sur $\mathbb{R}$

Q1 Montrez que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est croissante, alors la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} u_i$ est elle aussi croissante.

Q2 Les réels positifs a, b, c, d, e et f vérifient $a+b\leqslant e$ et $c+d\leqslant f$. Montrez que $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\leqslant\sqrt{ef}$.

Q3 Munissons $\mathbb{N}^*$ de la relation $\preceq$ définie comme suit : $a\preceq b \iff \exists n\in\mathbb{N}^* \mid a^n=b$. La relation $\preceq$ est-elle un ordre ? Si oui, est-il total ? La partie $\{a,3\}$ est-elle majorée ?

Q4 Notons E l'ensemble des nombres de la forme $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$, où p et q sont des naturels au moins égaux à 2. E est-elle majorée ? Si oui, quelle est sa borne supérieure ? Possède-t-elle un plus grand élément ? E est-elle minorée ? Si oui, quelle est sa borne inférieure ? Possède-t-elle un plus petit élément ?

Q5 Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $u_n=\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$. Quel est le signe de u_n ? Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q6 Soit $f:\ n\mapsto\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}$. Sans l'aide d'une calculatrice, établissez $f(1)<0$ et $f(2)>0$. Montrez que f est croissante.

Q7 Soient a, b et c trois réels. Établissez : $|a|\cdot|b-c|\leqslant|b|\cdot|a-c|+|c|\cdot|a-b|$.

Q8 Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\geqslant 1$. Montrez que $x^{2n-1}+x\leqslant x^{2n}+1$. Quand a-t-on l'égalité ?

Q9 Soient $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux familles de réels. Comparez les deux réels $A=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i+y_i)$ et $B=\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\right)+\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} y_i\right)$.

Q10 Pour $x>0$ et $n\geqslant 1$, établissez $\dfrac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}}\leqslant\dfrac{1}{2n+1}$.

Q11 Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de réels strictement positifs. Établissez : $\left(\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\right)\left(\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{x_i}\right)\geqslant n^2$.

Q12 Soient $u,v\in\mathbb{R}$. Montrez l'inégalité $|u|+|v|\leqslant|u+v|+|u-v|$.

Q13 Soient $x,y,z\in\mathbb{R}$. Montrez l'inégalité $xy+yz+zx\leqslant x^2+y^2+z^2$.

Q14 Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrez l'inégalité $(1+x+x^2)^2\leqslant 3(1+x^2+x^4)$.

Q15 Soient $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$. Montrez l'inégalité $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 4}|x_k|\leqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4}|x_i+x_j|$.

Q16 Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ deux familles de réels. Établissez les relations $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(a_k+b_k)\leqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k+\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} b_k$ et $\left|\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k-\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} b_k\right|\leqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k-b_k|$. Pour chaque inégalité, donnez un exemple où elle est stricte.

Q17 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Justifiez l'existence de $\delta(A)=\sup\big\{|x-y|\ :\ x\in A \text{ et } y\in A\big\}$. Prouvez que $\delta(A)=\sup(A)-\inf(A)$.

Q18 Montrez que $\displaystyle\bigcup_{n\geqslant 2}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ est un intervalle que vous expliciterez.

Q19 Soient a et b deux réels qui vérifient $0<a<b$. On note $E=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}]ka,kb[$. (i) prouvez qu'il existe $A>0$ tel que $]A,+\infty[\subset E$; (ii) déterminez $\inf\big\{A:]A,+\infty[\subset E\big\}$.

Q20 Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\left(a_k\right)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de réels. Prouvez que la fonction $x\in\mathbb{R}\to\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|x-a_k|$ possède un minimum, que vous préciserez.

Q21 Munissons l'ensemble $\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$ de la relation suivante : $x\preceq y \iff \frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{y}$. Est-ce que $\preceq$ est une relation d'ordre ? Si c'est le cas, cet ordre est-il total ?