Lois de composition

Q1 Soit E un ensemble muni d'une loi notée $\star$ associative. Prouvez que l'ensemble des éléments de E réguliers pour la loi $\star$ est une partie stable de E.

Q2 Un ensemble E est muni d'une loi $*$ possédant un neutre e, et vérifiant la propriété suivant : $x*(y*z) = (x*z)*y$ quels que soient x, y et z. Montrez que cette loi est associative et commutative.

Q3 Étudiez $*$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $a * b = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$. Deux approches possibles : examiner les propriétés éventuelles l'une après l'autre ; ou, en allant à la pêche, donner une autre expression de $a * b$.

Q4 Étudiez $\star$ définie sur $\mathcal{I} = \,]-1,+1[$ par $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Vous établirez successivement : que $\star$ est bien une loi ; qu'elle est commutative (pas dur) et associative ; qu'elle possède un neutre ; et que tout $x \in \mathcal{I}$ possède un symétrique (dans $\mathcal{I}$, bien entendu) pour $\star$.

Un peu de combinatoire

► Soit E fini, de cardinal n. Rappelons qu'une loi sur E est une fonction de $E \times E$ dans E, et qu'elle peut commodément être représentée par un tableau, comme le sont les tables d'addition et de multiplication au dos des cahiers d'écoliers.

Q1 Combien existe-t-il de lois de composition sur E ?

Q2 Combien sont commutatives ?

Q3 Combien ont un élément neutre ?

Q4 À l'isomorphisme près, combien existe-t-il de lois différentes sur un ensemble à deux éléments ?

Lois et formules logiques

► L'ensemble $\mathcal{B} = \{0,1\}$ est muni classiquement des deux opérations logiques $+$ et $\times$, définies par les tables suivantes :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

En pratique, nous noterons uv au lieu de $u \times v$. Nous noterons également $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$.

Q1 Il existe seize lois sur l'ensemble $\mathcal{B}$; décrivez chacune d'elles par une formule logique. Par exemple, l'addition est décrite par la formule $u + v$.