Questions en vrac

Q1 Notons f la fonction qui, au naturel n, associe $-\dfrac{n}{2}$ si n est pair et $\dfrac{1+n}{2}$ si n est impair. f est-elle injective ? Est-ce une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$?

Q2 Notons g la fonction qui, au naturel n, associe $\dfrac{n}{2}$ si n est pair et $\dfrac{1-n}{2}$ si n est impair. g est-elle injective ? Est-ce une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$?

Q3 Soient f et g deux fonctions de E dans lui-même. (i) supposons $g \circ f$ injective, montrez que f est injective. (ii) supposons $g \circ f$ surjective, montrez que g est surjective. (iii) supposons $g \circ f$ injective et f surjective, montrez que g est injective. (iv) énoncez et démontrez la propriété manquante !

Q4 Soient E un ensemble et $f : E \mapsto E$. Supposons $f \circ f = f$. Montrez que f est injective ssi elle est surjective. Que pouvez-vous dire de f lorsqu'elle est bijective ?

Q5 Soient f, g et h trois fonctions de E dans lui-même. Notonse $p = h \circ g \circ f$, $q = g \circ f \circ h$ et $r = f \circ h \circ g$. Supposons que deux des fonctions p, q et r sont injectives, et la troisième surjective ; montrez que toutes trois sont bijectives. Recommencez, en échangeant les mots *injective* et *surjective*.

Q6 Soit $c \in \mathbb{Z}$. Montrez que $f_c : k \in \mathbb{Z} \mapsto k + (-1)^k c$ est bijective ; quelle est sa bijection réciproque ? *Indication* : distinguez deux cas selon la parité de k ; puis, pour expliciter ${f_c}^{-1}$, distinguez deux cas selon la parité de c.

Q7 Montrez que deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans lui-même ne peuvent vérifier à la fois $(f \circ g)(x) = x$ et $(g \circ f)(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q8 Déterminez les fonctions $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ qui vérifient $\left|f(x) - f(y)\right| \geqslant |x - y|$ quels que soient $x, y \in [0,1]$.

Q9 Combien existe-t-il de fonctions strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$? $\binom{p}{n}$ si $p \geqslant n$, 0 sinon

► Rappel : soient E un ensemble E et A une partie de E ; la *fonction caractéristique* de A est $\chi_A : E \mapsto \{0,1\}$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Q10 $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x - \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ est-elle injective ? surjective ? Explicitez $f^{-1}(x)$.

Q11 Explicitez une bijection de $[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$ sur $[\![1,n^2]\!]$. *Indication* : observez un échiquier, et voyez comment numéroter ses cases simplement.

Q12 Soit $f : E \mapsto E$ vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Montrez que f est injective ssi elle est surjective.

Q13 Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. Soient f et g deux fonctions surjectives de $\mathbb{R}$ dans $[a,b]$. L'équation $f(x) = g(x)$ possède-t-elle nécessairement des solutions ?

► Rappel : $\wp(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.

Q14 Soient A et B deux parties de E et $f : \wp(E) \to \wp(A) \times \wp(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Donnez une CNS pour que f soit injective, puis pour que f soit surjective. Explicitez f^{-1}, lorsque f est bijective.

Mini-problème

► Notons $f : (p,q) \in \mathbb{N}^2 \mapsto p^2 + q^2 + q + 2pq$.

Q1 Dressez un tableau donnant la valeur de $f(p,q)$ pour p et q décrivant $[\![0,4]\!]$.

Q2 Montrez que f est injective.

Q3 Exhibez un naturel n'appartenant pas à l'image de f.

► f n'est donc pas surjective

Q4 Quel est le plus petit naturel n'appartenant pas à l'image de f ?

Q5 Caractérisez les naturels qui ne sont pas dans l'image de f.

Mini-problème

► Notons $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, xy) \in \mathbb{R}^2$.

Q1 f est-elle injective ?

Q2 f est-elle surjective ?

Q3 Donnez une caractérisation précise de l'image de f.

Q4 Donnez une représentation graphique de l'image de f.