Sup PCSI 2 — Problème corrigé : autour de la fonction « partie entière »

Énoncé

$\boxed{\text{Q1}}$ • Quels sont les réels λ tels que $\lfloor \lambda x \rfloor = \lambda \lfloor x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

$\boxed{\text{Q2}}$ • Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 3x \rfloor$.

$\boxed{\text{Q3}}$ • Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = \lfloor 5x \rfloor$.

$\boxed{\text{Q4}}$ • Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor x/2 \rfloor + \lfloor x/3 \rfloor + \lfloor x/5 \rfloor = 6$.

$\boxed{\text{Q5}}$ • Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor + \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2$. Explicitez $f(x)$ pour $0 \leqslant x < 1$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$; quelle relation existe-t-il entre $f(x+n)$ et $f(x)+n$? Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même

$\boxed{\text{Q6}}$ • Soient a et b deux réels distincts. Montrez que $\lfloor na \rfloor \neq \lfloor nb \rfloor$ à partir d'un certain rang. (Ouardini 2.1)

$\boxed{\text{Q7}}$ • Déterminez les réels x tels que $\lfloor x \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor$.

$\boxed{\text{Q8}}$ • Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons $f_a : n \in \mathbb{Z} \mapsto \lfloor na \rfloor$. Déterminez les valeurs de a pour lesquelles f_a est injective. Déterminez les valeurs de a pour lesquelles f_a est surjective. (Ouardini 2.11)

Solution

$\boxed{\text{Q1}}$ • 0 et 1 sont des solutions évidentes ; montrons que ce sont les seules. Soit λ une solution ; en remplaçant x par 1, nous obtenons $\lambda \in \mathbb{Z}$. Supposons $\lambda < 0$: en remplaçant x par $1/2$, nous obtenons une contradiction puisque $\lfloor \lambda x \rfloor < 0$ tandis que $\lambda \lfloor x \rfloor = 0$. Supposons $\lambda \geqslant 2$: en remplaçant cette fois x par $1/\lambda$, nous obtenons à nouveau une contradiction puisque $\lfloor \lambda x \rfloor = 1$ tandis que $\lambda \lfloor x \rfloor = 0$.

$\boxed{\text{Q2}}$ • Remarquons que tout relatif est solution ; et que si x est solution, alors $x + p$ est également solution quel que soit le relatif p. Il nous suffit de déterminer les solutions appartenant à $[0, 1[$. Nous constatons que pour $0 \leqslant x < 1/3$, les deux membres sont nuls ; pour $1/3 \leqslant x < 1/2$, le membre de gauche est nul mais celui de droite est égal à 1 ; pour $1/2 \leqslant x < 2/3$, les deux membres sont égaux à 1 ; enfin, pour $2/3 \leqslant x < 1$, le membre de gauche est égal à 1 et celui de droite à 2. Concluons : l'ensemble des solutions est la réunion des deux familles d'intervalles $[p, p + 1/3[$ et $[p + 1/2, p + 2/3[$ lorsque p décrit $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ • 0 est une solution évidente. Raisonnons par CNS. Soit x une solution ; nous avons $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x < \lfloor 2x \rfloor + 1$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor \leqslant 3x < \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + 2$ puis $\lfloor 5x \rfloor \leqslant 3x < \lfloor 5x \rfloor + 2$. Mais $\lfloor 5x \rfloor > 5x - 1$ et $\lfloor 5x \rfloor \leqslant 5x$. Nous en déduisons $5x - 1 < 3x < 5x + 2$, soit $-1 < -2x < 2$ ou encore $-1 < x < 1/2$. Pour $0 \leqslant x < 1/5$, les deux membres de l'égalité sont nuls ; pour $1/5 \leqslant x < 1/2$, le membre de gauche est nul et celui de droite est au moins égal à 1. Examinons maintenant ce qui se passe pour les réels négatifs : pour $-1/2 \leqslant x < 0$, le membre de gauche est égal à -2 ; celui de droite vaut -3 si $-1/2 \leqslant x < -2/5$, -2 si $-2/5 \leqslant x < -1/5$ et $-1/5$ si $-1/5 \leqslant x < 0$. Nous pouvons conclure : l'ensemble des solutions est la réunion des deux intervalles $[-2/5, -1/5[$ et $[0, 1/5[$.

$\boxed{\text{Q4}}$ • Un peu d'attention nous donne déjà la solution 6. Notons $f(x)$ le membre de gauche : f est une fonction croissante ; donc, si a et b sont des solutions vérifiant $a < b$, alors f est constante sur $[a, b]$ si bien que cet intervalle ne contient que des solutions. Par suite, l'ensemble des solutions est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $x < 6$, alors $\lfloor x < 2 \rfloor \leqslant 2$, $\lfloor x/3 \rfloor \leqslant 1$ et $\lfloor x/5 \rfloor \leqslant 1$; donc $f(x) \leqslant 4$, si bien que x ne peut être solution de notre équation. Observons que f est constante sur l'intervalle $[6, 8[$ puisque nous avons alors $3 \leqslant x/2 < 4$, $2 \leqslant x/3 < 3$ et $1 \leqslant x/5 < 2$. Enfin, $f(8) = 7$: donc l'ensemble des solutions est l'intervalle $[6, 8[$.

$\boxed{\text{Q5}}$ • Pour $0 \leqslant x < 1$, nous avons $\lfloor x \rfloor = 0$, donc $f(x) = x^2$.

• Nous savons que $\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$ pour tout relatif n. Donc :

$$f(x+n) = \lfloor x+n \rfloor + \big(x + n - \lfloor x+n \rfloor\big)^2 = n + \lfloor x \rfloor + \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2 = n + f(x)$$

• Nous allons montrer que f est strictement croissante ; ceci établira son injectivité. Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Notons $n = \lfloor x \rfloor$ et $p = \lfloor y \rfloor$. Nous avons $f(x) = f(x - n + n) = n + f(x - n) = n + (x - n)^2$ puisque $0 \leqslant x - n < 1$; de même, $f(y) = p + (y - p)^2$. Remarquons que $0 \leqslant (x - n)^2 < 1$ et $0 \leqslant (y - p)^2 < 1$. Si $n < p$, alors $f(x) < n + 1 \leqslant p \leqslant f(y)$, donc $f(x) < f(y)$. Sinon, $x - n < y - p$; comme ces deux nombres sont dans $[0, 1[$, nous avons $(x - n)^2 < (y - p)^2$ puis $f(x) < f(y)$.

• Soit $y \in \mathbb{R}$. Notons comme ci-dessus $p = \lfloor y \rfloor$. Alors $y - p \in [0, 1[$; notons $x = p + \sqrt{y - p}$: nous avons $\sqrt{y - p} \in [0, 1[$, donc $f(x) = f\big(p + \sqrt{y-p}\big) = p + f\big(\sqrt{y-p}\big) = p + \big(\sqrt{y-p}\big)^2 = p + y - p = y$. Ceci prouve la surjectivité de f.

$\boxed{\text{Q6}}$ • Supposons $a < b$ pour fixer les idées ; comme la fonction « partie entière inférieure est croissante », nous ne pouvons espérer obtenir que $\lfloor na \rfloor < \lfloor nb \rfloor$. Nous avons $\lfloor na \rfloor \leqslant na$ et $nb - 1 < \lfloor nb \rfloor$. Il suffit donc de montrer que $na \leqslant nb - 1$ à partir d'un certain rang ; ceci est réalisé ssi $n(b-a) \geqslant 1$, soit $n \geqslant \left\lfloor \dfrac{1}{b-a} \right\rfloor$.

$\boxed{\text{Q7}}$ • Si $x < 0$, alors $\lfloor x \rfloor < 0$ et $\lfloor x^2 \rfloor \geqslant 0$, donc x ne peut être solution. Clairement, tout élément de $[0, 1[$ est solution : les deux membres de l'équation sont nuls. Il en est de même pour tout élément de $[1, \sqrt{2}[$: cette fois, les deux membres sont égaux à 1. En revanche, aucun élément de $[\sqrt{2}, 2[$ n'est solution : le membre de gauche vaut 1, tandis que celui de droite vaut 2. Enfin, si $x \geqslant 2$, alors $\lfloor x^2 \rfloor > x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \geqslant x + 1 > x \geqslant \lfloor x \rfloor$: ceci montre que x n'est pas solution. Concluons : l'ensemble des solutions est l'intervalle $[0, \sqrt{2}[$.

$\boxed{\text{Q8}}$ • Montrons que f est injective ssi $|a| \geqslant 1$.

• Supposons $a \geqslant 1$. Soit $n \in \mathbb{Z}$: alors $(n+1)a = na + a \geqslant na + 1$, donc $f(n+1) = \lfloor (n+1)a \rfloor \geqslant \lfloor na + 1 \rfloor = \lfloor na \rfloor + 1 = f(n) + 1$. Nous en déduisons $f(n+1) > f(n)$: f est strictement croissante, donc injective. Supposons maintenant $a \leqslant -1$: cette fois, $(n+1)a \leqslant na - 1$, puis $f(n+1) = \lfloor (n+1)a \rfloor \leqslant \lfloor na - 1 \rfloor = \lfloor na \rfloor - 1 = f(n) - 1$. Cette fois, $f(n+1) < f(n)$: f est strictement décroissante, donc injective.

• Supposons maintenant $|a| < 1$. Si $a = 0$, alors f est constante et la question est réglée. Si $0 < a < 1$, prenons $n = 1$: alors $f(n) = \lfloor na \rfloor = 0 = f(0)$, donc f n'est pas injective. Enfin, examinons le cas $-1 < a < 0$: $f(-1) = \lfloor -a \rfloor = 0 = f(0)$, donc f n'est pas injective.