Sup PCSI 2 — Exercices : combinatoire (3)

Q1 On note E l'ensemble des suites U de naturels qui vérifient : $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : U_k = 0 \Leftrightarrow k \geqslant n$. Combien d'éléments U de E vérifient $\sum_{k\in\mathbb{N}} U_k = p$ où $p \in \mathbb{N}$ est fixé ? On notera que la somme a un sens, car elle ne porte, en fait, que sur un nombre *fini* de termes.

Q2 De combien de façons peut-on disposer les nombre 1 à 8 autour d'un cercle, de manière à ce que la somme de deux nombres voisins soit un nombre premier ; vous n'énumèrerez que les solutions primitives, c'est-à-dire définies à une isométrie près.

Q3 On place n points deux à deux distincts sur une droite, et on construit les $\frac{n(n-1)}{2}$ cercles (de rayon nul) ayant pour diamètre le segment défini par deux de ces points. Combien ces cercles ont-ils de points d'intersection autres que les n point considérés ?

Q4 Les *Pensées* de Pascal sont numérotées de 1 à 924, et écrites sur les pages 73 à 326 incluses d'un livre. Montrer qu'au moins 671 d'entre elles sont écrites sur une seule page, dont une ayant même numéro que la page sur laquelle elle est écrite.

Q5 De combien de façons peut-on choisir, dans une rangée de douze maisons, quatre maisons deux à deux non contiguës ? Généralisation ; de combien de façons peut-on choisir, dans une rangée de n maisons, p maisons deux à deux non contiguës ?

Q6 Dans un échiquier, compter les carrés à côtés parallèles au quadrillage, et dont les sommets sont des centres de cases ; calculer la valeur moyenne de l'aire de ces carrés. Pour qui l'ignorerait : il y a 64 cases sur un échiquier, disposées en 8 rangées de 8... Reprendre l'exercice, en supprimant la condition de parallèlisme.

Q7 Combien existe-t-il de $p-$uplets $(F_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ de parties de $[\![1,n]\!]$ vérifiant $F_k \subset F_{k+1}$ pour tout $k \in [\![1,p-1]\!]$?

Q8 Soit E un ensemble de taille n, et $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ des naturels non nuls tels que $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant r} \alpha_k = n$. Combien existe-t-il de partitions de E en r sous-ensembles $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ tels que $|A_k| = \alpha_k$ pour tout $k \in [\![1,r]\!]$?

Q9 Soit E un ensemble fini non vide, de taille n. Donnez des expressions simples de $S_1 = \displaystyle\sum_{X\in\wp(E)} (-1)^{|X|}$, $S_2 = \displaystyle\sum_{X\in\wp(E)} |X|$ et $S_3 = \displaystyle\sum_{(X,Y)\in\wp(E)^2} |X\cap Y|$.

Q10 Soit E un ensemble de taille n. Calculez $\displaystyle\sum_{X\subset E} |X|$.

Q11 Montrez que, dans un ensemble de taille $n \geqslant 1$, il y a autant de parties de taille paire que de parties de taille impaire. Il existe au moins deux preuves différentes.

Q12 Soit E un ensemble à n éléments. Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \subset B$?

Q13 Donnez une preuve de l'égalité $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^3 = \Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k\Big)^2$ basée sur un examen attentif de la table de multiplication. En empilant des damiers de côté $1, 2, \dots, n$, retrouvez la formule donnant $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^2$.

Q14 Vous disposez d'une balance de Roberval et de n boules dont une et une seule est creuse (donc plus légère que les autres). Quel est le nombre maximal de pesées requises pour isoler cette boule, si vous vous y prenez astucieusement ?

Q15 E est un ensemble de dix naturels deux à deux distincts, compris entre 1 et 100. Montrez qu'il existe deux parties distinctes A et B de E vérifiant $\displaystyle\sum_{a\in A} a = \sum_{b\in B} b$. *Indication* : appliquez le principe des tiroirs.

Q16 Dans un polygone à n sommets, combien y-a-t-il (au plus) de diagonales ? Combien celles-ci ont-elles (au plus) de points d'intersection autres que les sommets du polygone ?

Q17 Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, comptez le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation $|x| + |y| + |z| = n$.

Q18 Calculez $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \max(i,j) \qquad \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \min(i,j) \qquad \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |i-j|$.