Sup PCSI 2 — Exercices : combinatoire

Dénombrements divers

Q1 Soient p et q deux naturels non nuls. Donnez une preuve combinatoire de la relation $(p+q)(p+q-1) = p(p-1)+q(q-1)+2pq$.

Q2 Un *triomino* est un triangle équilatéral dont chaque sommet est marqué d'un numéro compris entre 0 et 6 inclus. Combien existe-t-il de triominos différents ?

Q3 Combien existe-t-il de naturels dont l'écriture décimale n'utilise que des chiffres distincts ?

Q4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons x_n le nombre d'entiers k appartenant à l'intervalle discret $[\![0,n]\!]$ et tels que $\binom{n}{k}$ soit impair. Quelle est la parité de x_n ?

Q5 Soit E un ensemble de cardinal n. Calculez $\displaystyle\sum_{X\subset E} |X|$.

Q6 Montrez que, dans un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair. Il existe au moins deux preuves différentes.

Q7 Soit E un ensemble à n éléments. Combien existe-t-il de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \subset B$?

Q8 Comptez les anagrammes des mots : ALGORITHME TANGENTE RECURRENCE.

Q9 Classons (selon l'ordre usuel) les naturels dont l'écriture décimale utilise quatre chiffres distincts pris dans $\{1, 2, 5, 7, 9\}$. Combien y-en-a-t-il ? Quel est le premier ? le 23-ième ? Quel est le rang de 1729 ? Quelle est leur somme ?

Q10 Parmi les permutations de $[\![1,n]\!]$: combien possèdent exactement n points fixes ? Combien possèdent exactement $n-1$ points fixes ? Combien possèdent exactement $n-2$ points fixes ? Combien possèdent exactement $n-3$ points fixes ?

Q11 Un nombre est *palindrome* s'il se lit indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche. Combien existe-t-il de palindromes dans l'intervalle discret $[\![1000,10000]\!]$?

Q12 La compagnie aérienne *Troud'Air* dessert 6 aéroports. Combien de lignes différentes peut-elle exploiter ?

Q13 La compagnie maritime *Nec mergitur* exploite 45 lignes. Combien de ports dessert-elle ?

Q14 Combien existe-t-il de fonctions strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$?

Q15 Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, comptez le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation $|x|+|y| = n$; puis le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation $|x|+|y|+|z| = n$.

Q16 Fixons n et p dans $\mathbb{N}^*$; combien l'équation $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| = p$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{Z}^n$?

Q17 Vous disposez d'une balance de Roberval et de n boules dont une et une seule est creuse (donc plus légère que les autres). Quel est le nombre maximal de pesées requises pour isoler cette boule, si vous vous y prenez astucieusement ?

Q18 E est un ensemble de dix naturels deux à deux distincts, compris entre 1 et 100. Montrez qu'il existe deux parties distinctes A et B de E telles que : $\sum\limits_{a\in A} a = \sum\limits_{b\in B} b$. *Indication* : appliquez le principe des tiroirs.

Q19 Prouvez que le nombre de personnes qui, au cours d'une soirée mondaine, ont serré un nombre IMPAIR de mains est nécessairement PAIR. Exercice assez subtil…

Q20 De combien de façons peut-on disposer les nombre 1 à 8 autour d'un cercle, de manière à ce que la somme de deux nombres voisins soit un nombre premier ; vous n'énumèrerez que les solutions primitives, c'est-à-dire définies à une isométrie près.

Q21 On place n points deux à deux distincts sur une droite, et on construit les $\frac{n(n-1)}{2}$ cercles (de rayon nul) ayant pour diamètre le segment défini par deux de ces points. Combien ces cercles ont-ils de points d'intersection autres que les n point considérés ?

Q22 Les *Pensées* de Pascal sont numérotées de 1 à 924, et écrites sur les pages 73 à 326 incluses d'un livre. Montrer qu'au moins 671 d'entre elles sont écrites sur une seule page, dont une ayant même numéro que la page sur laquelle elle est écrite.

Q23 De combien de façons peut-on choisir, dans une rangée de douze maisons, quatre maisons deux à deux non contiguës ? Généralisation ; de combien de façons peut-on choisir, dans une rangée de n maisons, p maisons deux à deux non contiguës ?

$\boxed{\text{Q24}}$ Dans un échiquier, compter les carrés à côtés parallèles au quadrillage, et dont les sommets sont des centres de cases ; calculer la valeur moyenne de l'aire de ces carrés. Pour qui l'ignorerait : il y a 64 cases sur un échiquier, disposées en 8 rangées de 8... Reprendre l'exercice, en supprimant la condition de parallèlisme.

$\boxed{\text{Q25}}$ Dans un polygone à n sommets, combien y-a-t-il (au plus) de diagonales ? Combien celles-ci ont-elles (au plus) de points d'intersection autres que les sommets du polygone ?

$\boxed{\text{Q26}}$ Combien existe-t-il de $p-$uplets $(F_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ de parties de $[\![1,n]\!]$ vérifiant $F_k \subset F_{k+1}$ pour tout $k \in [\![1,p-1]\!]$?

$\boxed{\text{Q27}}$ Soit E un ensemble de taille n, et $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ des naturels non nuls tels que $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant r} \alpha_k = n$. Combien existe-t-il de partitions de E en r sous-ensembles $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ tels que $|A_k| = \alpha_k$ pour tout $k \in [\![1,r]\!]$?

$\boxed{\text{Q28}}$ Soit E un ensemble fini non vide, de taille n. Donnez des expressions simples de $S_1 = \displaystyle\sum_{X\in\wp(E)} (-1)^{|X|}$, $S_2 = \displaystyle\sum_{X\in\wp(E)} |X|$ et $S_3 = \displaystyle\sum_{(X,Y)\in\wp(E)^2} |X\cap Y|$.

7 : 3^n ; **8** : 5040 et 50400 ; **10** : 1, 0, $\binom{n}{2}$, $2\binom{n}{3}$; **12** : 15 ; **13** : 10 ; **14** : $\binom{p}{n}$ si $p \geqslant n$, 0 sinon ;