Manipulation de factorielles et de coefficients binomiaux

Q1 Quel est le plus grand des deux nombres $A = 40! \times 60!$ et $B = 45! \times 55!$?

Q2 Quel est le plus grand terme dans le développement de $(3+5)^{40}$?

Q3 Déterminez $\min_{0\leqslant k\leqslant n} k!(n-k)!$, puis $\max_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k}$.

Q4 Quel est le coefficient de $x^6y^4z^5$ dans l'expression développée de $(x+2y-3z)^{15}$?

Q5 Simplifiez $A_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k\cdot k!$. Méthode 1 : regardez les premiers termes ; méthode 2 : recherchez un télescopage.

Q6 Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, donnez une relation simple entre $k\binom{n}{k}$ et $n\binom{n-1}{k-1}$. Retrouvez cette relation par la méthode du double décompte. Simplifiez alors $B_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k\binom{n}{k}$. Donnez une autre preuve de la formule obtenue, en observant la dérivée de $x \mapsto (1+x)^n$.

Q7 Simplifiez $P_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k\binom{n}{k}$, $Q_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k k\binom{n}{k}$, $R_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k^2\binom{n}{k}$ et $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

Q8 Établissez la formule $\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Méthode 1 : dénombrez de deux façons différentes les n-parties d'un ensemble à $2n$ éléments ; méthode 2 : observez le développement de $(1+x)^{2n}$.

Q9 En manipulant la fonction $f : x \mapsto (1+e^x)^n$ et ses dérivées successives, donnez des expressions simples de $\sum_{0\leqslant k\leqslant n} k^p\binom{n}{k}$, pour $p \in [\![0,2]\!]$.

Q10 Fixons un naturel p. Établissez $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p}\binom{n}{p} = \frac{1}{p!}$. Interprétation en termes de probabilités ?

Q11 Pour $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$, donnez une autre expression de $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$. En déduire la formule $\sum_{0\leqslant k\leqslant p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$, pour $0 \leqslant p \leqslant n$. Donnez ensuite une expression *simple* de $\sum_{0\leqslant k\leqslant p} (-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Q12 Pour $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant n$, établissez la formule $\sum_{0\leqslant k\leqslant q} \binom{q}{k}\binom{n-q}{p-k} = \binom{n}{p}$.

Q13 Pour $0 \leqslant p \leqslant n$, donnez une expression *simple* de $\sum_{p\leqslant k\leqslant n} \binom{k}{p}$.

Q14 $\star\star\star$ Résolvez dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ l'équation : $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p+1} = 2\binom{n}{p}$

Q15 Établissez la formule $\sum_{0\leqslant p\leqslant n}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-p} \binom{n}{p}\binom{n}{k}\binom{n}{n-p-k} = \binom{3n}{n}$.

Q16 Établissez la formule $\sum_{0\leqslant k\leqslant p} \binom{n}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{2n-1}{p-1}$.

Q17 Donnez une preuve de l'égalité $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^3 = \Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k\Big)^2$ basée sur un examen attentif de la table de multiplication. En empilant des damiers de côté $1, 2, \ldots, n$, retrouvez la formule donnant $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^2$.

Q18 Pour $n \geqslant 1$, prouvez l'égalité $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{k}\binom{n}{k} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}$.

Q19 Calculez $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \max(i,j)$ $\quad\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \min(i,j)$ $\quad\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |i-j|$

$\boxed{\text{Q20}}$ Pour $0 \leqslant p < n$, établissez : $\binom{}{n}^p = \sum_{1 \leqslant k \leqslant p+1} \binom{n-k}{p+1-k}$. Pour n et p fixés, combien l'équation $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k = p$ possède-t-elle de solutions dans $\mathbb{N}^n$? Même question, pour l'inéquation $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k \leqslant p$.

1 : A ; **2** : $\binom{40}{15}$; **4** : -328255527600 ;