Exercice 1 (d'après HEC 2003, option économique)

► Notons V l'ensemble des couples (x, y) de réels vérifiant $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} < y < \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que V est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, muni de la norme $\|.\|_2$.

► Notons $f : (x, y) \in V \mapsto xy^2 + x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que f admet sur V un minimum, dont vous préciserez la valeur.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que f est majorée sur V.

$\boxed{\text{Q4}}$ Explicitez la borne supérieure de f ; est-elle atteinte en un point de V ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Finalement, que pouvez-vous dire de $f(V)$?

► Notons $g : (x, y) \mapsto \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{4} - xy^2 - x^2 - y^2\right)}{\dfrac{1}{4} + xy^2 + x^2 + y^2}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que g est définie sur V.

$\boxed{\text{Q7}}$ Déterminez l'ensemble des valeurs prises par g.

Exercice 2 (d'après ESC 2002, option scientifique)

► Notons $g : t \geqslant 0 \mapsto te^{-t}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Étudiez rapidement les variations de g.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $g(t) \leqslant \dfrac{4}{te^2}$ pour tout $t > 0$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit $n \geqslant 3$. Montrez que l'équation $g(t) = 1/n$ possède deux solutions réelles ; la plus petite sera notée α_n, l'autre sera notée β_n.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge ; quelle est sa limite ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Donnez un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ diverge.

► Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, définissons $f(x, y) = \dfrac{\exp\big(-1/(x^2 + 4y^2)\big)}{x^2 + 4y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, 0\big\}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ En utilisant la question 2, montrez que f est continue en $(0, 0)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Explicitez les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, 0\big\}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Déterminez les points critiques de f.

$\boxed{\text{Q12}}$ Déterminez le minimum global de f, ainsi que l'ensemble P des points de $\mathbb{R}^2$ le réalisant.

$\boxed{\text{Q13}}$ Déterminez le maximum global de f, ainsi que l'ensemble Q des points de $\mathbb{R}^2$ le réalisant.

► Pour $n \geqslant 3$, notons $E_n = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 1/n\big\}$. Notons $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y = x/2\big\}$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Montrez que $E_n \cap D$ se réduit aux deux points $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2\alpha_n}}, \sqrt{\dfrac{1}{8\alpha_n}}\right)$ et $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2\beta_n}}, \sqrt{\dfrac{1}{8\beta_n}}\right)$.

► Notons Σ la surface d'équation $z = f(x, y)$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Décrivez les lignes de niveau de Σ.

$\boxed{\text{Q16}}$ Donnez l'allure de Σ.