

## Centres de gravité, moments d'inertie

- Q1 Déterminez les coordonnées du centre de gravité d'un quart d'ellipse, d'équation  $x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .  
*Réponse* :  $x_G = \frac{4a}{3\pi}, y_G = \frac{4b}{3\pi}$ . Extension à un huitième d'ellipsoïde ?
- Q2 Déterminez les coordonnées du centre de gravité de la partie du plan d'équation  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x$ .  
*Réponse* :  $x_G = \frac{\pi}{2}, y_G = \frac{\pi}{8}$ .
- Q3 Déterminez les coordonnées du centre de gravité de la partie du plan délimitée par la cardioïde d'équation  $\rho = a(1 + \cos(\theta))$ . *Réponse* :  $x_G = \frac{5a}{6}, y_G = 0$ .
- Q4 Calculez le moment d'inertie de l'ellipsoïde d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  par rapport à l'axe d'équation  $x = y = 0$ . *Réponse* :  $\frac{4\pi abc(a^2 + b^2)}{15}$ .

## Pour amateurs avertis

- Q5 Les habitants de la planète TRAFAMALDORE décident de percer un tunnel cylindrique de rayon  $r$ , du pôle nord au pôle sud ; le rayon de leur planète est  $R$ . Quel est le volume des déblais ? *Réponse* :  $\frac{4\pi}{3}(R^3 - (R^2 - r^2)^{3/2})$ .
- Q6 On coupe un fromage de chèvre d'équation  $x^2 + y^2 \leq r^2$  par deux coups de couteau d'équations respectives  $z = 0$  et  $z = mx$ . Quel est le volume de chacune des deux portions ? *Réponse* :  $\frac{2mr^3}{3}$ .
- Q7 Quel est le volume commun aux deux cylindres d'équations respectives  $x^2 + y^2 = r^2$  et  $x^2 + z^2 = r^2$  ?  
*Réponse* :  $\frac{16r^3}{3}$ .
- Q8 Une boule de pétanque (pleine, en acier) flotte sur du mercure. Quelle est la hauteur immergée ?