$\boxed{\text{Un exercice curieux}}$

Énoncé

Montrez que les réels $\ln(2) \times \ln(6)$ et $\ln^2(3)$ sont distincts.

Solution

Notons $a = \ln(2)$ et $b = \ln(3)$. Le script Maple suivant :

```
a := ln(2) : b := ln(3):
g := a*(a+b): d := b^2:
evalf(g-d);
```

nous fournit la réponse `+.0350040635244284332`, laquelle suggère $g > d$. Nous allons prouver cette inégalité en toute rigueur.

Nous avons $g - d = a^2 + ab - b^2 = b^2\big((a/b)^2 + (a/b) - 1\big) = b^2 T(a/b)$, où $T : x \mapsto x^2 + x - 1$.

Les racines de ce trinôme sont $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Il nous suffit donc d'établir $a/b > x_2$.

Nous y arriverons en « coinçant » le nombre 31/50 entre eux.

D'un côté, nous avons : $\exp\big(31\ln(3)\big) = 3^{31}$ et $\exp\big(50\ln(2)\big) = 2^{50}$.

Nous remarquons que $3^5 = 243 < 256 = 2^8$; donc $3^{30} = (3^5)^6 < (2^8)^6 = 2^{48}$; comme $3 < 4 = 2^2$, nous obtenons $3^{31} < 2^{50}$ dont nous déduisons $31\ln(3) < 50\ln(2)$, puis $31/50 < a/b$.

Pour l'autre côté :

$$\frac{31}{50} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{56 - 25\sqrt{5}}{50} = \frac{56^2 - 25^2 \times 5}{50(56 + 25\sqrt{5})} = \frac{11}{50(56+25\sqrt{5})} > 0$$

Ceci montre $x_2 < 31/50$.

Vous constaterez que le recours à une calculatrice n'était pas nécessaire, avec un grain d'astuce.