Sup PCSI 2 — Quatre exercices de trigonométrie corrigés

Q1 • Assurez-vous de l'existence du réel $\alpha = \arcsin \dfrac{1}{5} + \arcsin \dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{10}$, puis donnez une expression très simple de α. Réponse : $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Solution

• L'existence de $\alpha_1 = \arcsin \frac{1}{5}$ ne pose pas de problème. Voyons ce qu'il en est de $\alpha_2 = \arcsin \dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{10}$. Il s'agit de montrer que le réel $x = \dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{10}$ appartient à l'intervalle $[-1,1]$, ce qui est à peu près immédiat : $2 < \sqrt{6} < 3$ et $1 < \sqrt{3} < 2$, donc $2 < 2\sqrt{6} - \sqrt{3} < 5$, puis $1/5 < x < 1/2$, à plus forte raison $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

• $\sin(\alpha) = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2)$. Par définition, $\sin(\alpha_1) = \dfrac{1}{5}$ et $\sin(\alpha_2) = \dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{10}$. Par ailleurs, nous savons que $\cos\big(\arcsin(u)\big) = \sqrt{1-u^2}$ pour tout $u \in [-1,1]$. Nous en déduisons successivement :

$$\cos(\alpha_1) = \cos\big(\arcsin(1/5)\big) = \sqrt{1-(1/5)^2} = \sqrt{1-1/25} = \sqrt{24/25} = \frac{\sqrt{6\times 2^2}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\cos(\alpha_2) = \cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\Big(\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{10}\Big)^2} = \sqrt{1-\frac{24+3-4\sqrt{18}}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{100-27+4\sqrt{18}}{10^2}} = \frac{\sqrt{73+12\sqrt{2}}}{10}$$

À ce stade, nous remarquons que $72 = (6\sqrt{2})^2$, donc $73 + 12\sqrt{2} = 1 + 2\times 6\sqrt{2} + (6\sqrt{2})^2 = \big(1+6\sqrt{2}\big)^2$, d'où $\cos(\alpha_2) = \dfrac{1+6\sqrt{2}}{10}$. En rassemblant ces résultats, nous obtenons :

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{5}\times\frac{1+6\sqrt{2}}{10} + \frac{2\sqrt{6}}{5}\times\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{10} = \frac{1+6\sqrt{2}+24-6\sqrt{2}}{50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

Comme $\sin(\alpha) = \sin\pi/6$, nous avons $\alpha = \pi/6 \pmod{2\pi}$ ou $\alpha = 5\pi/6 \pmod{2\pi}$. Or $0 < 1/5 < 1/2$ implique $0 < \alpha_1 < \pi/6$. D'autre part, l'encadrement $1/5 < x < 1/2$ établi plus haut implique $0 < x < 1/2$, donc $0 < \alpha_2 < \pi/6$. Nous en déduisons $0 < \alpha < \pi/3$, à plus forte raison $-\pi/2 \leqslant \alpha_2 \leqslant \pi/2$, donc $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{6}}$.

Q2 • Assurez-vous de l'existence du réel $\beta = \arcsin \dfrac{1}{3} + \arcsin \dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$, puis donnez une expression de β au moyen d'un seul arcsin. Réponse : $\beta = \arcsin \dfrac{2}{3}$.

Solution

• L'existence de $\beta_1 = \arcsin \frac{1}{3}$ ne pose pas de problème. Voyons ce qu'il en est de $\beta_2 = \arcsin \dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$. Il s'agit de montrer que le réel $x = \dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$ appartient à l'intervalle $[-1,1]$, ce qui est à peu près immédiat : $1 < \sqrt{2} < 2$ et $2 < \sqrt{5} < 3$, donc $1 < 4\sqrt{2} - \sqrt{5} < 6$, puis $1/9 < x < 2/3$, à plus forte raison $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

• $\sin(\beta) = \sin(\beta_1 + \beta_2) = \sin(\beta_1)\cos(\beta_2) + \cos(\beta_1)\sin(\beta_2)$. Par définition, $\sin(\beta_1) = \dfrac{1}{3}$ et $\sin(\beta_2) = \dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$. Par ailleurs, nous savons que $\cos\big(\arcsin(u)\big) = \sqrt{1-u^2}$ pour tout $u \in [-1,1]$. Nous en déduisons successivement :

$$\cos(\beta_1) = \cos\big(\arcsin(1/3)\big) = \sqrt{1-(1/3)^2} = \sqrt{1-1/9} = \sqrt{8/9} = \frac{\sqrt{2^3}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos(\beta_2) = \cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\Big(\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}\Big)^2} = \sqrt{1-\frac{32+5-8\sqrt{10}}{81}}$$

$$= \sqrt{\frac{81-37+8\sqrt{10}}{9^2}} = \frac{\sqrt{44+8\sqrt{10}}}{9} = \frac{\sqrt{2^2(11+2\sqrt{10})}}{9} = \frac{2\sqrt{11+2\sqrt{10}}}{9}$$

À ce stade, nous remarquons que $11+2\sqrt{10} = 1+2\times\sqrt{10}+(\sqrt{10})^2 = \big(1+\sqrt{10}\big)^2$, donc $\cos(\beta_2) = \dfrac{2\big(1+\sqrt{10}\big)}{9}$. En rassemblant ces résultats, nous obtenons :

$$\sin(\beta) = \frac{1}{3}\times\frac{2\big(1+\sqrt{10}\big)}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9} = \frac{2+2\sqrt{10}+16-2\sqrt{10}}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

Nous pouvons donc exprimer β en fonction de $t = \arcsin\dfrac{2}{3}$. Plus précisément, comme $\sin(\beta) = \sin(t)$, nous avons $\beta = t \pmod{2\pi}$ ou $\beta = \pi - t \pmod{2\pi}$. Or $0 < 1/3 < 1/2$ implique $0 < \beta_1 < \pi/6$. D'autre part, $1 < \sqrt{2} < 3/2$ et $2 < \sqrt{5} < 3$ impliquent $1 < 4\sqrt{2}-\sqrt{5} < 4$, donc $1/9 < x < 4/9$ et à plus forte raison $0 < x < 1/2$: donc $0 < \beta_2 < \pi/6$. Nous en déduisons $0 < \beta < \pi/3$, à plus forte raison $-\pi/2 \leqslant \beta \leqslant \pi/2$, donc $\boxed{\beta = \arcsin\dfrac{2}{3}}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Même question avec $\gamma = \arcsin\dfrac{1}{6} + \arcsin\dfrac{\sqrt{35}-2\sqrt{2}}{18}$. Réponse : $\gamma = \arcsin\dfrac{1}{3}$.

Solution

• L'existence de $\gamma_1 = \arcsin\frac{1}{6}$ ne pose pas de problème. Voyons ce qu'il en est de $\gamma_2 = \arcsin\dfrac{\sqrt{35}-2\sqrt{2}}{18}$. Il s'agit de montrer que le réel $x = \dfrac{\sqrt{35}-2\sqrt{2}}{18}$ appartient à l'intervalle $[-1,1]$, ce qui est à peu près immédiat : $5 < \sqrt{35} < 6$ et $1 < \sqrt{2} < 2$, donc $1 < \sqrt{35}-2\sqrt{2} < 4$, puis $1/18 < x < 2/9$, à plus forte raison $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

• $\sin(\gamma) = \sin(\gamma_1+\gamma_2) = \sin(\gamma_1)\cos(\gamma_2) + \cos(\gamma_1)\sin(\gamma_2)$. Par définition, $\sin(\gamma_1) = \dfrac{1}{6}$ et $\sin(\gamma_2) = \dfrac{\sqrt{35}-2\sqrt{2}}{18}$. Par ailleurs, nous savons que $\cos\big(\arcsin(u)\big) = \sqrt{1-u^2}$ pour tout $u \in [-1,1]$. Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
\cos(\gamma_1) &= \cos\big(\arcsin(1/6)\big) = \sqrt{1-(1/6)^2} = \sqrt{1-1/36} = \sqrt{35/36} = \frac{\sqrt{35}}{6}\\
\cos(\gamma_2) &= \cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\Big(\frac{\sqrt{35}-2\sqrt{2}}{18}\Big)^2} = \sqrt{1-\frac{35+8-4\sqrt{70}}{324}}\\
&= \sqrt{\frac{324-43+4\sqrt{70}}{18^2}} = \frac{\sqrt{281+4\sqrt{70}}}{18}
\end{aligned}$$

À ce stade, nous remarquons que $280 = (2\sqrt{70})^2$, donc $281+4\sqrt{70} = 1+2\times2\sqrt{70}+(2\sqrt{70})^2 = \big(1+2\sqrt{70}\big)^2$, donc $\cos(\gamma_2) = \dfrac{1+2\sqrt{70}}{18}$. En rassemblant ces résultats, nous obtenons :

$$\sin(\gamma) = \frac{1}{6}\times\frac{1+2\sqrt{70}}{18} + \frac{\sqrt{35}}{6}\times\frac{\sqrt{35}-2\sqrt{2}}{18} = \frac{1+2\sqrt{70}+35-2\sqrt{70}}{6\times18} = \frac{36}{6\times18} = \frac{1}{3}$$

Nous pouvons donc exprimer γ en fonction de $t = \arcsin\dfrac{1}{3}$. Plus précisément, comme $\sin(\gamma) = \sin(t)$, nous avons $\gamma = t \pmod{2\pi}$ ou $\gamma = \pi - t \pmod{2\pi}$. Or $0 < 1/6 < 1/2$ implique $0 < \gamma_1 < \pi/6$. D'autre part, l'encadrement $1/18 < x < 2/9$ établi plus haut entraîne $0 < x < 1/2$, donc $0 < \gamma_2 < \pi/6$. Nous en déduisons $0 < \gamma < \pi/3$, à plus forte raison $-\pi/2 \leqslant \gamma \leqslant \pi/2$, donc $\boxed{\gamma = \arcsin\dfrac{1}{3}}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Même question avec $\delta = \arcsin\dfrac{1}{5} - \arcsin\dfrac{2\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{35}$. Réponse : $\delta = -\arcsin\dfrac{1}{7}$.

Solution

• L'existence de $\delta_1 = \arcsin\frac{1}{5}$ ne pose pas de problème. Voyons ce qu'il en est de $\delta_2 = \arcsin\dfrac{2\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{35}$. Il s'agit de montrer que le réel $x = \dfrac{2\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{35}$ appartient à l'intervalle $[-1,1]$, ce qui est à peu près immédiat : $2 < \sqrt{6} < 3$ et $1 < \sqrt{3} < 2$, donc $8 < 2\sqrt{6}+4\sqrt{3} < 14$, puis $8/35 < x < 2/5$, à plus forte raison $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

• $\sin(\delta) = \sin(\delta_1 - \delta_2) = \sin(\delta_1)\cos(\delta_2) - \cos(\delta_1)\sin(\delta_2)$. Par définition, $\sin(\delta_1) = \dfrac{1}{7}$ et $\sin(\delta_2) = \dfrac{2\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{35}$. Par ailleurs, nous savons que $\cos\big(\arcsin(u)\big) = \sqrt{1-u^2}$ pour tout $u \in [-1, 1]$. Nous en déduisons successivement :

$$\cos(\delta_1) = \cos\big(\arcsin(1/5)\big) = \sqrt{1-(1/5)^2} = \sqrt{1-1/25} = \sqrt{24/25} = \frac{\sqrt{6\times 2^2}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\begin{aligned}\cos(\delta_2) = \cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\Big(\frac{2\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{35}\Big)^2} = \sqrt{1-\frac{24+48+48\sqrt{2}}{35^2}} \\ &= \sqrt{1-\frac{72+48\sqrt{2}}{1225}} = \sqrt{\frac{1225-72-48\sqrt{2}}{35^2}} = \frac{\sqrt{1153-48\sqrt{2}}}{35}\end{aligned}$$

À ce stade, nous remarquons que $1152 = (24\sqrt{2})^2$, donc $1153-48\sqrt{2} = 1-2\times 24\sqrt{2}+(24\sqrt{2})^2 = \big(-1+24\sqrt{2}\big)^2$. Comme $-1+24\sqrt{2} \geqslant 0$, nous en déduisons $\sqrt{1153-48\sqrt{2}} = -1+24\sqrt{2}$, puis $\cos(\delta_2) = \dfrac{-1+24\sqrt{2}}{35}$. En rassemblant ces résultats, nous obtenons :

$$\sin(\delta) = \frac{1}{5}\times\frac{-1+24\sqrt{2}}{35} - \frac{2\sqrt{6}}{5}\times\frac{2\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{35} = \frac{-1+24\sqrt{2}-24-24\sqrt{2}}{5\times 35} = -\frac{25}{35} = -\frac{1}{7}$$

Nous pouvons donc exprimer δ en fonction de $t = -\arcsin\dfrac{1}{7}$. Plus précisément, comme $\sin(\delta) = \sin(t)$, nous avons $\delta = t \pmod{2\pi}$ ou $\delta = \pi - t \pmod{2\pi}$. Mais δ_1 et δ_2, en tant qu'arcsinus de réels positifs, sont tous deux dans l'intervalle $[0, \pi/2]$; donc $-\pi/2 \leqslant \delta \leqslant \pi/2$, et finalement $\boxed{\delta = -\arcsin\dfrac{1}{7}}$.