$\boxed{\text{Sup PCSI 2 — Exercices : trigonométrie (2)}}$

Première version de ce recueil d'exercices, centré sur les manipulations trigonométriques. Merci de me transmettre vos remarques, critiques, etc.

Simplifications de sommes d'arcsin, arccos, arctan

$\boxed{\text{Q1}}$ Simplifiez $\alpha = 3\arctan(1/4) + \arctan(1/20) + \arctan(1/1985)$.

▶ Notons $\beta = \arctan(1/4)$, $\gamma = \arctan(1/20)$ et $\delta = \arctan(1/1985)$. Nous avons : $\tan(2\beta) = \dfrac{2\times 1/4}{1-(1/4)^2} = \dfrac{8}{15}$; puis $\tan(3\beta) = \dfrac{\dfrac{46}{2} + \dfrac{1}{20}}{1 - \dfrac{47}{52}\times\dfrac{1}{20}} = \dfrac{\dfrac{496}{520}}{\dfrac{993}{1040}} = \dfrac{992}{993}$. Observons que $1985 = 992 + 993\ldots$ Poursuivons le calcul :

$$\tan(\alpha) = \frac{\dfrac{992}{993} + \dfrac{1}{1985}}{1 - \dfrac{992}{993}\times\dfrac{1}{1985}} = \frac{1985\times 993 + 992}{993\times 1985 - 992} = 1$$

donc $\alpha \equiv \dfrac{\pi}{4} \pmod{\pi}$. Il reste à déterminer l'entier k tel que $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. $1/4$, $1/20$ et $1/985$ sont tous dans $]0, \sqrt{3}/3[\ = \ ]0, \tan(\pi/6)[$. Donc β, γ et δ sont dans $]0, \pi/6]$. Par suite, $\alpha \in\ ]0, 5\pi/6]$ ce qui implique $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{4}}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Simplifiez $\alpha = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$. Donnez une interprétation géométrique.

▶ Notons $a = \arctan(2)$ et $b = \arctan(3)$. $\tan(a+b) = \dfrac{2+3}{1-2\times 3} = -1$, donc $a + b \equiv -\pi/4 \pmod{\pi}$. Comme a et b sont dans $]\pi/4, \pi/2[$, $a+b$ est dans $]\pi/2, \pi[$ et donc $a + b = \dfrac{3\pi}{4}$. Par ailleurs, $\arctan(1) = \pi/4$; nous pouvons conclure : $\boxed{\alpha = \pi}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Simplifiez $\alpha = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.

▶ Notons $a = \arctan(2)$, $b = \arctan(5)$ et $c = \arctan(8)$. Alors $\tan(a+b) = \dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}} = \dfrac{7/10}{9/10} = \dfrac{7}{9}$; puis $\tan(\alpha) = \tan(a+b+c) = \dfrac{\dfrac{7}{9}+\dfrac{1}{8}}{1-\dfrac{7}{9}\times\dfrac{1}{8}} = \dfrac{\dfrac{65}{72}}{\dfrac{65}{72}} = 1$. Donc $\alpha \equiv \pi/4 \pmod{\pi}$. Comme 2, 5 et 8 sont tous trois supérieurs à 1, a, b et c sont tous trois dans $]\pi/4, \pi/2[$. Donc $a+b+c \in\ ]0, 3\pi/4[$. Nous concluons : $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{4}}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Simplifiez $\alpha = 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$.

▶ Notons $a = \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et $b = \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$. Alors $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)} = \dfrac{\dfrac{2}{5}}{1-\dfrac{1}{25}} = \dfrac{5}{12}$; puis $\tan(4a) = \dfrac{\dfrac{5}{6}}{1-\dfrac{25}{144}} = \dfrac{120}{119}$. Observons que $119 + 120 = 239\ldots$ La suite du calcul : $\tan(\alpha) = \dfrac{\dfrac{120}{119} - \dfrac{1}{239}}{1 + \dfrac{120}{119}\times\dfrac{1}{239}} = \dfrac{120\times 239 - 119}{119\times 239 + 120} = 1$; donc $\alpha \equiv \pi/4 \pmod{\pi}$. Mais $0 < 1/5 < \sqrt{3}/3$, donc $0 < a < \pi/6$, donc $0 < 4a < 2\pi/3$; de même, $0 < 1/239 < \sqrt{3}/3$, donc $0 < b < \pi/6$. Ainsi $-\pi/6 < \alpha < 2\pi/3$. Donc $\boxed{\alpha = \pi/4}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Simplifiez $\alpha = \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$.

► Notons $a = \arctan(1/2)$, $b = \arctan(1/5)$ et $c = \arctan(1/8)$. Alors $\tan(a+b) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{7}{9}$; puis $\tan(a+b+c) = \dfrac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}} = \dfrac{\frac{65}{72}}{\frac{65}{72}} = 1$. Donc $\alpha \equiv \pi/4 \pmod{\pi}$. Comme 1/2, 1/5 et 1/8 sont tous trois dans $]0,1[$, a, b et c sont dans $]0,\pi/4[$ et donc $a+b+c \in]0,3\pi/4[$. Donc $\boxed{\alpha = \pi/4}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Simplifiez $\varphi = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 5} \arctan(2k-1)$.

► • Notons $\alpha_k = \arctan(2k-1)$; $\alpha_1 = \pi/4$ et $\alpha_k \in]\pi/4,\pi/2[$ pour $k \in [\![2,5]\!]$. $\tan(\alpha_1+\alpha_2) = \dfrac{1+3}{1-1\times 3} = -2$; $\tan(\alpha_3+\alpha_4) = \dfrac{5+7}{1-5\times 7} = \dfrac{12}{-34} = \dfrac{-6}{17}$; $\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) = \dfrac{-2-6/17}{1-2\times 6/17} = \dfrac{-40}{5} = -8$. Donc $\tan(\varphi) = \dfrac{-8+9}{1-(-8)\times 9} = \dfrac{1}{73}$; donc $\varphi \equiv \arctan(1/73) \pmod{\pi}$.

• $\alpha_1 = \pi/4$; pour $k \in [\![2,5]\!]$, $\alpha_k \in]\pi/4,\pi/2[$; donc $\varphi \in]5\pi/4, 9\pi/4[$. Il reste à déterminer l'entier k tel que $\varphi = \alpha + k\pi$, soit $\varphi - \alpha = k\pi$. $\varphi - \alpha \in]\pi, 9\pi/4[$, donc $k = 2$ et finalement $\boxed{\varphi = \arctan\left(\dfrac{1}{73}\right) + 2\pi}$.

Simplifications d'expressions plus générales

$\boxed{\text{Q7}}$ Simplifiez $\cos\bigl(\arcsin(x)\bigr)$ et $\cos\bigl(\arctan(x)\bigr)$.

► • Notons $\alpha = \arcsin(x)$: alors $\sin(\alpha) = x$ et $\alpha \in [-\pi/2,\pi/2]$, donc $\cos(\alpha) \geqslant 0$. Alors $\cos(\alpha) = \sqrt{\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)} = \sqrt{1-x^2}$. Ainsi $\boxed{\cos\bigl(\arcsin(x)\bigr) = \sqrt{1-x^2}}$.

• Notons $\alpha = \arctan(x)$: donc $\tan(\alpha) = x$ et $\alpha \in]-\pi/2,\pi/2[$. Alors $\cos(\alpha) > 0$; de $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1+\tan^2(\alpha) = 1+x^2$, nous déduisons $\cos(\alpha) = \sqrt{\cos^2(\alpha)} = \sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Finalement : $\boxed{\cos\bigl(\arctan(x)\bigr) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Simplifiez $\arccos(-x)$, $\sin\bigl(\arccos(x)\bigr)$, $\sin\bigl(2\arccos(x)\bigr)$ et $\sin\bigl(\arctan(x)\bigr)$.

► • Notons $\alpha = \arccos(-x)$; donc $\cos(\alpha) = -x$ et $\alpha \in [0,\pi]$. Alors $\cos(\pi-\alpha) = x$ et $\pi - \alpha \in [0,\pi]$, si bien que $\pi - \alpha = \arccos(x)$. Concluons : $\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)}$.

• Notons $\alpha = \arccos(x)$; donc $\cos(\alpha) = x$ et $\alpha \in [0,\pi]$. Du coup, $\sin(\alpha) \geqslant 0$, donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\sin^2(\alpha)} = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1-x^2}$. Bref : $\boxed{\sin\bigl(\arccos(x)\bigr) = \sqrt{1-x^2}}$.

• $\sin\bigl(2\arccos(x)\bigr) = 2\sin\bigl(\arccos(x)\bigr)\cos\bigl(\arccos(x)\bigr)$; or $\cos\bigl(\arccos(x)\bigr) = x$; notons $\alpha = \arccos(x)$: nous aurons $\cos(\alpha) = x$ et $\alpha \in [0,\pi]$, donc $\sin(\alpha) \geqslant 0$. Alors $\sin(\alpha) = \sqrt{\sin^2(\alpha)} = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1-x^2}$. Concluons : $\boxed{\sin\bigl(2\arccos(x)\bigr) = \sqrt{1-x^2}}$.

• Notons $\alpha = \arctan(x)$; alors $\alpha \in]-\pi/2,\pi/2[$ et $x = \tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, d'où $\sin(\alpha = x\cos(\alpha)$; mais $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1+\tan^2(\alpha) = 1+x^2$; comme $\cos(\alpha) > 0$, il vient $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et donc $\boxed{\sin\bigl(\arctan(x)\bigr) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Simplifiez $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}\right)$.

► $\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}} \geqslant 0$, donc $f(x) \in [0,\pi/2]$. Alors $\cos\bigl(f(x)\bigr) = \sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}$, donc $\cos^2\bigl(f(x)\bigr) = \dfrac{1+\cos(x)}{2}$, soit encore $\cos(x) = 2\cos^2\bigl(f(x)\bigr) - 1\bigr) = \cos\bigl(2f(x)\bigr)$. Comme $2f(x) \in [0,\pi]$ nous pouvons en déduire $2f(x) = \arccos(x)$, et conclure : $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{2}\arccos\bigl(\cos(x)\bigr)}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Simplifiez $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}\right)$.

► $\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}} \in [0,1]$, donc $f(x) \in [0,\pi/2]$; $\sin\big(f(x)\big) = \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}$, donc $\sin^2\big(f(x)\big) = \dfrac{1+\sin(x)}{2}$, soit $\sin(x) = 2\sin^2\big(f(x)\big) - 1 = -\cos\big(2f(x)\big)$. Or $\sin(x) = \sin\big(2f(x) - \pi/2\big)$, avec $2f(x) - \pi/2 \in [-\pi/2,\pi/2]$. Alors $2f(x) - \pi/2 = \arcsin(x)$, soit finalement $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{2}\big(\arcsin(\sin(x)) + \pi/2\big)}$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Simplifiez $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$.

► • Notons $f(x)$ l'expression à simplifier et $k(x)$ l'expression à laquelle est appliquée la fonction arctan. Nous aurons $\alpha \in \left]-\pi/2,\pi/2\right[$ et $\tan(\alpha) = k(x)$. Cette expression a un sens ssi $x \in [-1,1]$. Notons $\beta = \arccos(x)$, alors $\beta \in [0,\pi]$ et $\cos(\beta) = x$. Nous aurons $\sqrt{1+x} = \sqrt{1+\cos(\beta)} = \sqrt{2\cos^2(\beta/2)} = \sqrt{2}\cos(\beta/2)$, ceci car $\beta/2 \in [0,\pi/2]$; donc $\cos(\beta/2) \geqslant 0$.

• De même, $\sqrt{1-x} = \sqrt{1-\cos(\beta)} = \sqrt{2\sin^2(\beta/2)} = \sqrt{2}\sin(\beta/2)$, car $\beta/2 \in [0,\pi/2]$, donc $\sin(\beta/2) \geqslant 0$.

• Rassemblons les résultats obtenus : $\tan(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2}\cos(\beta/2) - \sqrt{2}\sin(\beta/2)}{\sqrt{2}\cos(\beta/2) + \sqrt{2}\sin(\beta/2)} = \dfrac{\cos(\beta/2) - \sin(\beta/2)}{\cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)}$. Nous pouvons encore simplifier ceci :

$$\tan(\alpha) = \frac{\cos(\beta/2 - \cos((\pi-\beta)/2)}{\cos(\beta/2 + \cos((\pi-\beta)/2)} = \frac{-2\sin(\pi/4)\sin(\beta/2 - \pi/4}{2\cos(\pi/4)\cos(\beta/2 - \pi/4)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$$

Or $\beta \in [0,\pi] \Rightarrow -\beta/2 \in [-\pi/2, 0] \Rightarrow \pi/4 - \beta/2 \in [-\pi/4,\pi/4] \subset \left]-\pi/2,\pi/2\right[$; comme $\alpha \in \left]-\pi/2,\pi/2\right[$, nous pouvons affirmer que $\alpha = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\beta}{2}$, soit finalement :

$$\boxed{\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arccos(x)}{2}}$$

$\boxed{\text{Q12}}$ Simplifiez $f(x) = \arccos(1-2x^2)$.

► $x \in \mathcal{D}_f \iff -1 \leqslant 1-2x^2 \leqslant 1 \iff -2 \leqslant -2x^2 \leqslant 0 \iff 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x \leqslant 1$, donc $\mathcal{D}_f = [-1,1]$.
Notons $\alpha = \arcsin(x)$: $\alpha \in [-\pi/2,\pi/2]$ et $\sin(\alpha) \geqslant 0$, donc $1 - 2x^2 = 1 - 2\sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$. $2\alpha \in [-\pi,\pi]$ et $f(x) = \arccos\big(\cos(2\alpha)\big)$. Deux cas se présentent : ou bien $2\alpha \in [0,\pi] \iff \alpha \in [0,\pi/2] \iff x \in [0,1]$; alors $f(x) = 2\alpha = 2\arcsin(x)$; sinon, $2\alpha \in [-\pi,0[\iff \alpha \in [-\pi/2,0[\iff x \in [-1,0[$: alors $-2\alpha \in]0,\pi]$ et $f(x) = \arccos\big(\cos(-2\alpha)\big) = -2\alpha = -2\arcsin(x)$. Résumons :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [-1,1], \text{ nous avons } f(x) = 2\big|\arcsin(x)\big| = 2\arcsin\big(|x|\big)}$$

$\boxed{\text{Q13}}$ Simplifiez $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

► $\mathcal{D}_f = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$. Il est clair que f est impaire. Notons $\alpha = \arctan(x)$: $\alpha \in \left]-\pi/2,\pi/2\right[$ et $\tan(\alpha) = x$. Donc $\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} = \tan(2\alpha)$, d'où $f(x) \equiv \arctan\big(\tan(2\alpha)\big)\ 2\alpha \pmod{\pi}$ et donc $f(x) \in \left]-\pi/2,\pi/2\right[$. Ceci nous amène à envisager trois cas :
• $x < -1 \iff \alpha < -\pi/4 \iff 2\alpha < -\pi/2$; alors $f(x) = 2\arctan(x) + \pi$;
• $-1 < x < 1 \iff -\pi/4 < \alpha < \pi/4$: alors $f(x) = 2\arctan(x)$;
• $x > 1 \iff \alpha > \pi/4 \iff 2\alpha > \pi/2$; alors $f(x) = 2\arctan(x) - \pi$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Simplifiez $f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

► Il est clair que $\mathcal{D}_f = [-1,1]$. Notons $\alpha = \arcsin(x)$, alors $\sin(\alpha) = x$, donc $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)} = \sqrt{\cos^2(\alpha)} = \cos(\alpha)$, ceci car $\cos(\alpha) \geqslant 0$. D'où $2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$. Comme $2\alpha \in [-\pi,\pi]$, nous distinguons trois cas de figure :
• $2\alpha \in [-\pi,-\pi/2[\iff \alpha \in [-\pi/2,-\pi/4[\iff \sin(\alpha) = x \in [-1,-\sqrt{2}/2[$. Alors $-\pi - 2\alpha \in]-\pi/2, 0]$, donc $f(x) = -\pi - 2\arcsin(x)$;
• $2\alpha \in [-\pi/2,\pi/2] \iff \alpha \in [-\pi/4,\pi/4] \iff x \in [-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2]$; alors $f(x) = 2\arcsin(x)$;
• $2\alpha \in]\pi/2,\pi] \iff \alpha \in]\pi/4,\pi/2] \iff x \in]\sqrt{2}/2,1]$; alors $\pi - 2\alpha \in [0,\pi/2[$ et donc $f(x) = \pi - 2\arcsin(x)$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Simplifez $\tan\big(\arcsin(x)\big)$ et $\tan\big(\arccos(x)\big)$.

► • $\arcsin(x)$ est défini pour $x \in [-1,1]$, et appartient à $[-\pi/2,\pi/2]$. $\tan\big(\arcsin(x)\big)$ n'est défini que si $\arcsin(x) \notin \{-\pi/2,\pi/2\}$, ce qui revient à imposer $x \in]-1,1[$. Notons $\alpha = \arcsin(x)$: alors $\sin(\alpha) = x$, donc $\cos^2(\alpha) = 1-x^2$; $\alpha \in]-\pi/2,\pi/2[$ donc $\cos(\alpha) > 0$, et $\cos(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$. D'où $\tan\big(\arcsin(x)\big) = \tan(\alpha) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

• $\arccos(x)$ est défini pour $x \in [-1,1]$, et appartient à $[0,\pi]$. $\tan\big(\arccos(x)\big)$ est défini ssi $\arccos(x) \neq \pi/2$, soit $x \in [-1,0[\cup]0,1]$. Notons $\alpha = \arccos(x)$; alors $\cos(\alpha) = x$, donc $\sin^2(\alpha) = 1-x^2$; $\alpha \in [0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi]$ donc $\sin(\alpha) \geqslant 0$ et $\sin(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$. Nous en déduisons $\tan\big(\arccos(x)\big) = \tan(\alpha) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Simplifiez $f(x) = \arccos\Big(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\Big)$.

► $\varphi\ :\ x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et paire ; $\varphi'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2} < 0$ pour $x > 0$. f est donc strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Il est clair que $\varphi(x) \in]-1,1]$ pour tout réel x ; donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Notons $\alpha = \arctan(x)$: $\alpha \in]-\pi/2,\pi/2[$, et $\tan(\alpha) = x$. Donc $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \dfrac{\cos^2(\alpha-\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)} = \cos(2\alpha)$. Donc $f(x) = \arccos\big(\cos(2\alpha)\big)$. Distinguons deux cas de figure :

• $2\alpha \in [0,\pi[\iff \alpha \in [0,\pi/2[\iff x \geqslant 0$; alors $f(x) = 2\alpha = 2\arctan(x)$;

• $2\alpha \in]-\pi,0] \iff \alpha \in]-\pi/2,0] \iff x < 0$; alors $-2\alpha \in]0,\pi][$ et donc $f(x) = -2\alpha = -2\arctan(x)$.

• Nous pouvons résumer ceci par $\boxed{f(x) = 2\arctan\big(|x|\big)}$.

• Figure absente : à vous de la retrouver !

$\boxed{\text{Q17}}$ Simplifez $f(x) = \arccos(x) + 2\arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big)$.

► Clairement, f est définie sur $[-1,1[$. Notons $\alpha = \arccos(x)$: alors $x = \cos(\alpha)$, avec $\alpha \in]0,\pi]$. D'où $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1+\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)} = \dfrac{2\cos^2(\alpha/2)}{2\sin^2(\alpha/2)} = \text{cotan}^2(\alpha/2) = \tan^2\Big(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\Big) = \tan^2\Big(\dfrac{\pi-\alpha}{2}\Big)$.

Or $\alpha \in]0,\pi] \Rightarrow \dfrac{\pi-\alpha}{2} \in [0,\pi/2[\Rightarrow \tan\Big(\dfrac{\pi-\alpha}{2}\Big) \geqslant 0$. Donc : $f(x) = \alpha + 2\arctan\Big(\sqrt{\dfrac{\pi-\alpha}{2}}\Big) = \alpha + 2\times\dfrac{\pi-\alpha}{2} = \pi$.

Autre méthode : f est dérivable sur $]-1,1]$ et : $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{2}{1+\frac{1+x}{1-x}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \times \dfrac{2}{(1-x)^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{(1-x)\sqrt{1-x}}{(1-x)^2\sqrt{1+x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Donc f est constante sur $]-1,1[$; par coninuité, elle l'est sur $[-1,1]$. Sa valeur constante est (par exemple) $f(x) = \arccos(0) + 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2} + 2\times\dfrac{\pi}{4} = \pi$.

$\boxed{\text{Q18}}$ Simplifiez $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Big)$.

► • $f(x)$ a un sens pour $x \in [-1,1]-\{0\}$. Notons $\alpha = \arccos(x)$, avec donc $\alpha \in [0,\pi]-\{\pi/2\}$; $\sin(\alpha) \geqslant 0$, donc $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \sin(\alpha)$, si bien que $\arctan\Big(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Big) = \arctan\Big(\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\Big) = \arctan\big(\tan(\alpha)\big)$.

• Pour $\alpha \in [0,\pi/2[$, nous avons $x \in]0,1]$ et donc $\arctan\Big(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Big) = \alpha = \arccos(x)$.

• Pour $\alpha \in]\pi/2,\pi]$, nous avons $x \in [-1,0[$ et donc $\arctan\Big(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Big) = \alpha - \pi = \arccos(x) - \pi$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Simpifiez $f(x) = \arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\Big)$.

▶ • Il est clair que $f(x)$ est défini ssi $\cos(x) \neq -1$: en effet, nous aurons $\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \geqslant 0$. De plus, $\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} = \dfrac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)} = \tan^2(x/2)$ donc $f(x) = \arctan\big(|\tan(x/2)|\big)$.

• Ainsi : $x \in \,]-\pi+2k\pi, 2k\pi[\; \Rightarrow x/2 \in \,]-\pi/2+k\pi, k\pi[\; \Rightarrow \tan(x/2) \leqslant 0 \Rightarrow f(x) = \arctan\big(-\tan(x/2)\big) = -\arctan\big(\tan(x/2)\big) = -(x/2-k\pi) = k\pi - x/2$ ceci car $x/2-k\pi \in \,]-\pi/2, 0[\; \subset \,]-\pi/2, \pi/2[$.

• De même $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi[\; \Rightarrow x/2 \in [k\pi, k\pi+\pi/2[\; \Rightarrow \tan(x/2) \geqslant 0 \Rightarrow f(x) = \arctan\big(\tan(x/2)\big) = x/2 - k\pi$; ceci car $x/2 - k\pi \in [0, \pi/2[\; \subset \,]-\pi/2, \pi/2[$.

• Notons que $x \in \,]-\pi, \pi[\; \Rightarrow f(x) = |x/2|$. De plus $f(x) = f(x - 2k\pi)$; comme $k = \left\lfloor \dfrac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor$, nous aurons $2k\pi \leqslant x+\pi < 2(k+1)\pi$, donc $-\pi \leqslant x - 2k\pi < \pi$. Finalement : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left| x - 2\left\lfloor \dfrac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor \pi \right|$ pour $x \notin \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxed{\text{Q20}}$ Simplifiez $f(x) = \arccos(4x^3 - 3x)$, après avoir déterminé l'ensemble de définition de f.

▶ • Notons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto 4x^3 - 3x$. Alors $g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1)$. Comme g est impaire, il suffit de dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+$; comme $g(1) = 1$, il est clair que $g(x) \in [-1, 1]$ ssi $x \in [-1, 1]$, donc $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$.

• Notons alors $\alpha = \arccos(x)$; donc $\cos(\alpha) = x$ et $/alpha \in [0, \pi]$. Alors $4x^3 - 3x = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) = \cos(3\alpha)$, donc $f(x) = \arccos\big(\cos(3\alpha)\big)$. Ceci nous amène à distinguer trois cas de figure.

• $\alpha \in [0, \pi/3]$, soit $x \in [1/2, 1]$; alors $3\alpha \in [0, \pi]$ et donc $f(x) = 3\alpha = 3\arccos(x)$.

• $\alpha \in \,]\pi/3, 2\pi/3[$, soit $x \in \,]-1/2, 1/2[$; alors $3\alpha \in \,]\pi, 2\pi[$, donc $f(x) = 2\pi - 3\alpha = 2\pi - 3\arccos(x)$, ceci car $2\pi - 3\alpha \in \,]0, \pi[\; \subset [0, \pi]$.

• $\alpha \in [2\pi/3, \pi]$, soit $x \in [-1, -1/2]$; alors $3\alpha \in [2\pi, 3\pi]$, donc $f(x) = 3\alpha - 2\pi = 3\arccos(x) - 2\pi$; ceci car $3\alpha - 2\pi \in [0, \pi]$.

$\boxed{\text{Q21}}$ Simplifiez $f(x) = \arctan\Big(\sqrt{1+x^2} - x\Big)$.

▶ Notons $\alpha = \arctan(x)$; alors $\tan(\alpha) = x$ et $\alpha \in \,]-\pi/2, \pi/2[$. Nous aurons $\sqrt{1+x^2} - x = \sqrt{1+\tan^2(\alpha)} - \tan(\alpha) = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}} - \tan(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)} - \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ ceci car $\cos(\alpha) > 0$.

Pousuivons le calcul : $\dfrac{1}{\cos(\alpha)} - \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{1-\cos(\pi/2-\alpha)}{\sin(\pi/2-\alpha)} = \dfrac{2\sin^2(\pi/4-\alpha/2)}{2\sin(\pi/4-\alpha/2)\cos(\pi/4-\alpha/2)} = \tan(\pi/4 - \alpha/2)$. Or $-\pi/2 < \alpha < \pi/2 \Rightarrow -\pi/4 < -\alpha/2 < \pi/4 \Rightarrow 0 < \pi/4 - \alpha/2 < \pi/2$; donc $\arctan\big(\tan(\pi/4-\alpha/2)\big) = \pi/4 - \alpha/2 = \pi/4 - \dfrac{\arctan(x)}{2}$. Concluons : $\boxed{f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\arctan(x)}{2}}$.

$\boxed{\text{Q22}}$ Pour $x \geqslant 0$, quelle relation lie $\arctan\big(\sqrt{x}\big)$ et $\arcsin\Big(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\Big)$?

▶ • Notons $\alpha = \arctan\big(\sqrt{x}\big)$; alors $\tan(\alpha) = \sqrt{x}$, avec $\alpha \in [0, \pi/2]$. Alors $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} = \sin(2\alpha)$, avec $2\alpha \in [0, \pi]$. Ceci nous amène à distinguer deux cas de figure.

• $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \alpha \in [0, \pi/4] \Rightarrow 2\alpha \in [0, \pi/2] \Rightarrow \arcsin\big(\sin(2\alpha)\big) = 2\alpha$, donc $\arcsin\Big(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\Big) = 2\arctan(x)$.

• $x > 1 \Rightarrow \alpha \in \,]\pi/4, \pi/2[\; \Rightarrow 2\alpha \in \,]\pi/2, \pi[\; \Rightarrow \arcsin\big(\sin(2\alpha)\big) = \pi - 2\alpha$; donc $\arcsin\big(\sin(2\alpha)\big) = \pi - 2\arctan(x)$.

Résolution d'équations

$\boxed{\text{Q23}}$ Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \dfrac{2\pi}{3}$.

▶ Les solutions éventuelles sont à chercher dans l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Notons que $f : x \in I \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(2x)$ est cpntinue et strictement croissante, donc réalise une bijection de $[-1/2, 1/2]$ sur $\big[f(-1/2), f(1/2)\big]$. Observons que $f(1/2) = \arctan(1/2) + \arctan(1) = \pi/6 + \pi/2 = 2\pi/3$; ceci suffit pour conclure, par un heureux hasard : l'équation possède une et une seule solution, qui est $\boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$.

$\boxed{\text{Q24}}$ Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(x) + \arctan(2x) = \pi/4$.

▶ Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(x) + \arctan(2x)$: cette fonction est définie, continue et strictement croissante sur $/R$; quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), $f(x)$ tend vers π (resp. -π). f réalise donc une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$; comme $\pi/4$ appartient à cet intervalle, nous pouvons affirmer que l'équation possède une et une seule solution.

Nous avons $\tan\big(\arctan(x) + \arctan(2x)\big) = \dfrac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(2x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(2x))} = \dfrac{x + 2x}{1 - 2x^2} = \dfrac{3x}{1 - 2x^2}$.

Il nous reste donc à résoudre l'équation $\dfrac{3x}{1 - 2x^2} = \tan(\pi/4)$, soit $\dfrac{3x}{1 - 2x^2} = 1$, qui se ramène à $2x^2 + 3x - 1$; le discriminant est $\delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17 > 0$; les solutions sont $x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}$.

Observons que $x_2 < 0$ n'est certainement pas solution ; donc la solution de notre équation est $\boxed{\dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}}$.

Questions diverses

$\boxed{\text{Q25}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$, établissez la relation $\arctan(x + 1) - \arctan(x) = \arctan\Big(\dfrac{1}{1 + x + x^2}\Big)$. Prouvez la convergence de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{1}{1 + k + k^2}$ et calculez sa limite.

▶ • $1 + x + x^2 \neq 0$ quel que soit le réel x. $\tan\big(\arctan(x + 1) - \arctan(x)\big) = \dfrac{(x + 1) - x}{1 + (x + 1)x} = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$ donc $\arctan(x + 1) - \arctan(x) \equiv \arctan\Big(\dfrac{1}{1 + x + x^2}\Big) \pmod{\pi}$. Mais $x + 1 > x$, et arctan est croissante, donc $\arctan(x + 1) > \arctan(x)$ quel que soit le réel x. Par ailleurs, il est clair que $\arctan(x + 1) - \arctan(x) < \pi$. Enfin, $1 + x + x^2 > 0$ quel que soit le réel x, donc $\arctan\Big(\dfrac{1}{1 + x + x^2}\Big)$ est dans l'intervalle $]0, \pi/2[$. Nous pouvons alors conclure : $\arctan(x + 1) - \arctan(x) = \arctan\Big(\dfrac{1}{1 + x + x^2}\Big)$.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\arctan\Big(\dfrac{1}{1 + k + k^2}\Big) < \arctan\Big(\dfrac{1}{k + k^2}\Big) < \dfrac{1}{k + k^2} = \dfrac{1}{k(k + 1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k + 1}$.

Notons $u_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k + 1}$; par télescopage, nous avons $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} u_k = 1 - \dfrac{1}{n + 1}$; donc la suite de terme général $T_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} u_k$ converge vers 1.

Alors $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \arctan\Big(\dfrac{1}{1 + k + k^2}\Big) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \big(\arctan(k + 1) - \arctan(k)\big)$; un télescopage nous donne $S_n = \arctan(n + 1)$; donc $\boxed{S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \dfrac{\pi}{2}}$.

$\boxed{\text{Q26}}$ Tracez la courbe représentative de $f : x \mapsto \arcsin\big(\sin(x)\big)$.

▶ f est définie sur $\mathbb{R}$, continue, impaire et 2π-périodique. Étudions f sur l'intervalle $[0, \pi]$: nous avons $\sin\big(f(x)\big) = \sin(x)$, donc $f(x) \equiv x \pmod{2\pi}$ ou $f(x) \equiv \pi - x \pmod{2\pi}$; de plus $f(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$. Si $x \in [0, \pi/2]$, alors $f(x) = x$; si $x \in]\pi/2, \pi]$, alors $\pi - x \in [0, \pi/2[$ et donc $f(x) = \pi$. La courbe représentative est « en dents de scie ».

$\boxed{\text{Q27}}$ Étudiez la fonction $f : x \mapsto \arccos\big(\cos(x)\big) + \dfrac{1}{2}\arccos\big(\cos(2x)\big)$.

▶ • Il est clair que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, que f est paire et 2π-périodique. Nous l'étudierons sur l'intervalle $[0, \pi]$.

• $x \in [0, \pi] \Rightarrow \arccos\big(\cos(x)\big) = x$. Comme $2x \in [0, 2\pi]$, nous distinguerons deux cas de figure :

• $x \in [0, \pi/2] \Rightarrow 2x \in [0, \pi]$ donc $\arccos\big(\cos(2x)\big) = 2x$ et $f(x) = 2x$;

• $x \in]\pi/2, \pi] \Rightarrow 2x \in]\pi, 2\pi] \Rightarrow \arccos\big(\cos(2x)\big) = 2\pi - 2x$; ceci car $2\pi - 2x \in [0, \pi[$ et $\cos(2\pi - 2x) = \cos(2x)$, et donc $f(x) = \pi$.

La courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$ se compose de deux segments de droite : l'un menant du point $(0, 0)$ au point $(\pi/2, \pi)$; l'autre du point $(\pi/2, \pi)$ au point (π, π). Le tracé s'en déduit immédiatement, grâce à la parité et à la 2π-péridocité.

$\boxed{\text{Q28}}$ Exprimez $\beta = \arctan\Big(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\Big)$ en fonction de $\alpha = \arctan(x)$.

► $\tan(\alpha) = x$ implique :

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1} &= \frac{\tan^2(\alpha)-2\tan(\alpha)-1}{\tan^2(\alpha)+2\tan(\alpha)-1} = \frac{\sin^2(\alpha)-2\sin(\alpha)\cos(\alpha)-\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)+2\sin(\alpha)\cos(\alpha)-\cos^2(\alpha)}\\ &= \frac{-\cos(2\alpha)-\sin(2\alpha)}{-\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)} = \frac{\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)-\sin(2\alpha)} = \frac{1+\tan(2\alpha)}{1-\tan(2\alpha)}\end{aligned}$$

ceci sous réserve que $\cos(2\alpha)$ soit non nul, ce qui revient à dire que α n'est pas égal à $\pm\pi/4$ modulo π. Ainsi $\tan(\beta) = \dfrac{\tan(\pi/4)+\tan(2\alpha)}{1-\tan(\pi/4)\times\tan(2\alpha)} = \tan\Big(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\Big)$. Donc $\tan(\pi/4) = \dfrac{\pi}{4}+2\alpha$ modulo π.

$-\pi/2 < \alpha < \pi/2 \Rightarrow -\dfrac{3\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4}+2\alpha < \dfrac{5\pi}{4}$, ce qui amène à distinguer trois cas de figure :

• $-\dfrac{3\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4}+2\alpha < -\dfrac{\pi}{2}$, soit $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < -\dfrac{3\pi}{8}$, soit $x = \tan(\alpha) < -\dfrac{3\pi}{8} = -1-\sqrt{2}$; alors $\beta = \dfrac{\pi}{4}+2\alpha+\pi = 2\alpha+\dfrac{5\pi}{4}$

• $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{4}+2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, soit $-\dfrac{3\pi}{8} < \alpha < \dfrac{\pi}{8}$, ou encore $x = \tan(\alpha) \in \,]-\tan(3\pi/8), \tan(\pi/8)[$, soit $x \in \,]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}[$. Il vient alors $\beta = 2\alpha+\dfrac{\pi}{4}$. Ceci reste valable pour $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$.

• $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{4}+2\alpha < \dfrac{5\pi}{4}$, soit $\dfrac{\pi}{8} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, d'où $x = \tan(\alpha) > \tan\Big(\dfrac{\pi}{8}\Big) = -1+\sqrt{2}$; alors $\beta = \dfrac{\pi}{4}+2\alpha-\pi = 2\alpha-\dfrac{3\pi}{4}$. Ceci reste valable pour $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.