Sup PCSI 2 — Exercices : trigonométrie circulaire réciproque

Mise en route

$\boxed{\text{Q1}}$ Quelle relation (simple) existe-t-il entre $\arccos(x)$ et $\arccos(-x)$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Donnez des expressions de $\tan\big(\arcsin(x)\big)$, $\tan\big(\arccos(x)\big)$, $\sin\big(2\arccos(x)\big)$, $\cos\big(2\arcsin(x)\big)$ débarrassées de toute fonction trigonométrique !

$\boxed{\text{Q3}}$ Simplifiez $\sin\big(\arctan(x)\big)$ et $\cos\big(\arctan(x)\big)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Assurez-vous de l'existence du réel $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{10}\right)$, puis donnez une expression de α au moyen d'un seul arcsin. Même question avec $\beta = \arcsin\left(\frac{1}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{35}-2\sqrt{2}}{18}\right)$. Même question avec $\gamma = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) - \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{35}\right)$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Déterminez l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \arcsin(3x-4x^3)$ puis donnez une expression simple de $f(x)$. Indication : exprimez $\sin(3\alpha)$ en fonction de $\sin(\alpha)$.

Autour de arctan

$\boxed{\text{Q6}}$ Exprimez $\alpha = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$ avec un seul arctan et, au besoin, un multiple de π. Même question avec $\beta = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ et $\gamma = 3\arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{20}\right) + \arctan\left(\frac{1}{1985}\right)$. Vérifiez avec une calculatrice les résultats obtenus.

$\boxed{\text{Q7}}$ Donnez une expression de $\alpha = \sum_{1\leqslant k\leqslant 5} \arctan(2k-1)$ faisant intervenir le nombre π et *un seul* arc tangente.

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrez que $2\arctan\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) = \arctan\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Prouvez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$. En déduire la convergence et la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Pour x et y appartenant à $]0,1[$, établissez $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$. En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$. *Indication* : observez S_2 et S_3 (et, au besoin, S_4) et formulez une hypothèse de récurrence.

Questions diverses

$\boxed{\text{Q11}}$ Tracez la courbe représentative de $g : x \mapsto 2\arccos\big(\cos(x)\big) + \arccos\big(\cos(2x)\big)$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Soit x_0 un réel. Expliquez comment choisir un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant x_0, et tel que $f : x \in I \mapsto \sin(2x)$ réalise une bijection de I sur $[-1,1]$. Explicitez $f^{-1}(x)$ lorsque $x_0 = \frac{17\pi}{5}$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez que l'équation $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$ possède une et une seule solution réelle, puis déterminez cette solution. Même question avec l'équation $\arcsin(x) - \arccos(x) = \frac{\pi}{6}$.

$\boxed{\text{Q14}}$ L'équation $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \arctan(kx) = 2n$ possède-t-elle des solution réelles ? Répondez en moins d'une minute...

$\boxed{\text{Q15}}$ $\star\star$ Épluchez les oignons sans pleurer ! Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\Big(2\arccos\big(\operatorname{cotan}(2\arctan(x))\big)\Big) = 0$.

---

4 : $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, $\gamma = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$; **6** : $\alpha = 5\pi/4$, $\beta = \gamma = \pi/4$; **9** : $\pi/2$; **10** : $\pi/4$; **11** : $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$; **13** : $\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **14** : NON : $\arctan(kx) < \pi/2 < 2$; **15** : ± 1 et $\pm 1 \pm \sqrt{2}$;
