Sup PCSI2 — Logarithmes

► Rappel : pour $a > 0$ et $b \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $\log_b(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$; $\log_b(a)$ est le logarithme de a en base b. À part le logarithme naturel, on utilise le logarithme décimal (la base est $b = 10$) et le logarithme en base 2, noté lg.

Q1 Parmi les tangentes à la courbe d'équation $y = \ln(x)$, en existe-t-il une qui passe par l'origine du repère ?

Q2 Notons $f : x \mapsto \ln\big(\ln(x)\big)$; quel est l'ensemble de définition de f ? Explicitez $f'(x)$.

Q3 Quels sont les couples (a, b) de réels qui vérifient la curieuse relation $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$?

Q4 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 - 7x + 12) = \ln(4)$.

Q5 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln\big(|x - 1|\big) + \ln\big(|x + 2|\big) = \ln\big(|4x^2 + 3x - 7|\big)$. Source : Sauser.

Q6 Résolvez dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(60) \end{cases}$. Source : Sauser.

Q7 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 + \ln(x + 3) > \ln(x^2 + 2x - 3)$. Source : Bac Rouen 1977.

Q8 Soit $a = \sqrt[3]{4}$. Simplifiez $\log_a(128)$.

Q9 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log_3(x) + \log_x(3) = \dfrac{5}{2}$.

Q10 Résolvez dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations $\begin{cases} 7\big(\log_x(y) + \log_y(x)\big) = 50 \\ xy = 256 \end{cases}$

Q11 Quels sont les couples (a, b) de réels pour lesquels l'expression $F(a, b) = b^{\frac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}}$ a un sens ? Simplifiez $F(a, b)$.

Q12 Étudiez les variations de $f : x > 0 \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. En déduire qu'il existe un et un seul couple (a, b) de naturels non nuls distincts tels que $a^b = b^a$.

Q13 Le nombre $2^{44497} - 1$ est premier. Combien de chiffres requiert l'écriture décimale de ce nombre ? Indications : utilisez les fonctions « logarithme en base 2 » et « partie entière », et une calculatrice.

Q14 Le premier juin 1999 a été découvert un trente-huitième nombre de Mersenne premier. Il s'agit d'un nombre de la forme $2^n - 1$, où n est premier. L'annonce de cette découverte indique que l'écriture décimale de ce nombre requiert 2098960 chiffres ; déterminez la valeur de n à partir de ces informations.

Q15 Soit $x > 1$. Quel réel $b > 1$ minimise la quantité $b \log_b(x)$? Quel naturel $b > 1$ minimise la quantité $b \log_b(x)$? Quel naturel $b > 1$ minimise la quantité $(b + 1) \log_b(x)$?

Q16 Soient $x > 0$ et $y > 0$ vérifiant $x + y = 1$. Prouvez l'inégalité $x \ln(1/x) + y \ln(1/y) \leqslant \ln(2)$.

Q17 Soit C_a la courbe d'équation $y = \log_a(x)$. Quelle transformation simple envoie C_a sur C_b ?

Q18 ⋆⋆ Établissez en toute rigueur $\ln(2) \cdot \ln(6) \neq \ln^2(3)$.

Mini-problème : Bac, Clermont 1970

► Notons $f : x > 0 \mapsto \ln^2(x)$.

Q1 Étudiez rapidement les variations de f, puis tracez la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.

Q2 Montrez qu'il existe deux points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente passe par l'origine O du repère. Nous noterons A celui qui est sur l'axe des abscisses et I l'autre.

Q3 Explicitez une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f. Indication : une intégration par parties est utile.

Q4 Calculez l'aire de la partie du plan délimitée par l'arc A I de la courbe $\mathcal{C}$ et les segments O A et O I.