Sup PCSI2 — Exponentielles, sh, ch et th

Exponentielles

► Rappel : pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b = \exp\big(b\ln(a)\big)$. Et aussi : a^{b^c} désigne $a^{(b^c)}$.

Q1 Résolvez dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$.

Q2 Résolvez dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $2^{x^3} = 3^{x^2}$.

Q3 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2^{x^2}}{125^x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8^x}{(5^x)^x}$. Source : Sauser.

Q4 Résolvez dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système d'équations $\begin{cases} 3^x 5^y = 2^{2x+1} + 2^{2x-1} \\ 3^y 5^x = 2^{2x+2} + 2^{2x-2} \end{cases}$. Source : M.M.

Q5 Étudiez la fonction $x \mapsto e^x - x^e$, puis comparez *en toute rigueur* les réels e^π et π^e.

Q6 Pour quels réels x a-t-on l'inégalité $x^{(x^x)} > (x^x)^x$?

Q7 Quels couples (a, b) de réels vérifient $e^{ab} = e^a \times e^b$?

Q8 Quels couples (a, b) de réels vérifient $e^{ab} = e^a + e^b$?

Q9 Quels couples (a, b) de réels vérifient $e^{a+b} = e^a + e^b$?

Q10 Soient x et y deux éléments de $]1, +\infty] \setminus \{2\}$. Prouvez que $xy = x + y$ si et seulement si il existe un réel t non nul tel que $x = 1 + e^{1/z}$ et $y = 1 + e^{-1/z}$. Que se passe-t-il lorsque x ou y est égal à 2 ?

Trigonométrie hyperbolique

Q11 Complétez le formulaire de trigonométrie hyperbolique, en vous inspirant de la façon dont a été construit celui de trigonométrie circulaire.

Q12 Écrivez l'expression $A = \mathrm{ch}^4(x) + \mathrm{ch}^3(x)\,\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}^3(x) + \mathrm{sh}^4(x)$ sous la forme la plus simple possible.

Q13 Exprimez $\mathrm{ch}^3(x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(3x)$ et $\mathrm{ch}(x)$. En déduire une expression « linéaire » de $\mathrm{ch}^3(x)$, puis calculez $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{ch}^3(x)\,dx$.

Q14 Simplifiez chacune des sommes $C_n(x) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{ch}(kx)$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{sh}(kx)$. Indication : considérez $C + S$ et $C - S$, et mettez en évidence des sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique. Cherchez des formules analogues à celles qui ont été vues pour $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin(kx)$.

Q15 Prouvez la formule $\mathrm{th}(a) = \dfrac{2}{\mathrm{th}(2a)} - \dfrac{1}{\mathrm{th}(a)}$ puis simplifiez $S_n(a) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k < n} 2^k\,\mathrm{th}\big(2^k a\big)$. Imaginez puis résolvez l'énoncé analogue, en trigonométrie circulaire.