Étude de l'arc paramétré $x = t^2$, $y = t^2 + t^4 + t^5$

Généralités

Cet arc est de classe $\mathcal{C}^\infty$; il est simple, car $x(t) = x(u)$ implique $t = u$ ou $t = -u$; dans ce deuxième cas, $y(t) \neq y(u)$ (sauf si $t = u = 0$).

Branches infinies

Lorsque t tend vers $+\infty$, x et y tendent vers $+\infty$ et y/x tend vers $+\infty$; lorsque t tend vers $-\infty$, x tend vers $+\infty$ mais y tend vers $-\infty$ et y/x tend vers $-\infty$. Nous avons dans les deux cas une direction asymptotique ≪verticale≫.

Dérivées, tableau de variation

$x'(t) = 2t$ et $y'(t) = 5t^4 + 4t^3 + 2t = t(5t^3 + 4t^2 + 2)$.
Notons $\varphi : t \mapsto 5t^3 + 4t^2 + 2$; $\varphi'(t) = 15t^2 + 8t = t(15t + 8)$. φ est donc croissante sur $]-\infty, -8/15]$; décroissante sur $[-8/15, 0]$; et croissante à nouveau sur $[0, +\infty[$. $\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$; comme $\varphi(0) = 2$, nous en déduisons que φ s'annule une fois et une seule, en $\alpha \approx -1.2$.

t	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$x'(t)$		-		-	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	≈ 1.25	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	≈ 1.06	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	-	0	$+$	

Étude du point stationnaire

Nous remarquons que $f(0)$ est un point stationnaire, et c'est clairement le seul puisque $x(t)$ ne s'annule que pour $t = 0$.
Nous avons $\overrightarrow{f}''(0) = (2, 2)$ donc $p = 2$. Puis $\overrightarrow{f}'''(0) = (0, 0)$ et $\overrightarrow{f}^{(4)}(0) = (0, 24)$ donc $q = 2$. Ainsi $f(0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce.

Allure de la courbe

Nous avons fait apparaître la tangente au point stationnaire. Le deuxième point d'intersection de cette tangente avec la courbe a pour paramètre -1.
Le tracé de la courbe a été réalisé avec le logiciel MetaPost. Nous avons utilisé dix points, en plus du point stationnaire.

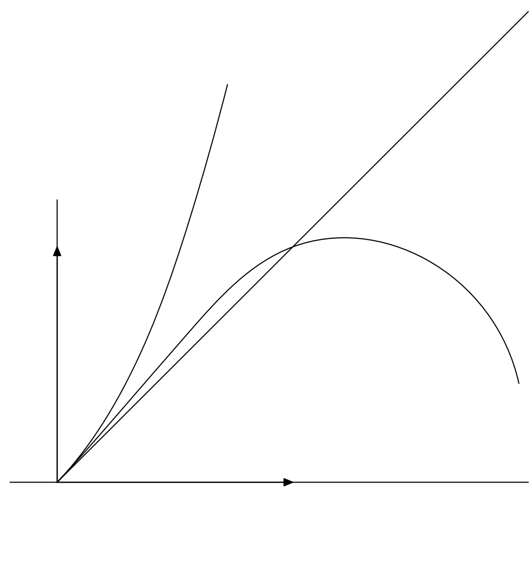

Figure 1: l'arc paramétré