

Le raisonnement par récurrence

► Nous notons \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Nous dirons *naturel* au lieu de *entier naturel*.

1 Le principe du raisonnement par récurrence

Soit A une partie de \mathbb{N} telle que :

- 0 appartient à A ;
- si n appartient à A , alors $n + 1$ appartient aussi à A ;

Nous pouvons affirmer que $A = \mathbb{N}$.

Signalons tout de suite que cette propriété ne peut être démontrée : elle fait partie des *axiomes* qui définissent \mathbb{N} . Ceci dit, nous voyons bien que :

- 0 appartient à A , donc $0 + 1$, c'est-à-dire 1, appartient à A ;
- puisque 1 appartient à A , nous pouvons maintenant affirmer que $1 + 1$, c'est-à-dire 2, appartient à A ;
- et ainsi de suite...

Le problème, c'est que pour établir $A = \mathbb{N}$ il faudrait rédiger une *infinité* d'étapes !

De l'axiome que nous venons d'énoncer, nous allons déduire le théorème suivant, qui est le principe du raisonnement par récurrence.

Soit $\mathcal{P}(n)$ une *assertion* (c'est-à-dire une affirmation, une phrase énonçant un fait) dont la vérité ou la fausseté dépend de la valeur que l'on donne à n . Supposons que :

1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
2. si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit le naturel n .

Preuve : notons A l'ensemble des naturels n tels que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. La propriété 1 nous dit que 0 appartient à A ; la propriété 2 nous dit que si n appartient à A , alors $n + 1$ appartient lui aussi à A . Donc $A = \mathbb{N}$, autrement dit : $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit le naturel n .

2 Un premier exemple

Nous allons montrer que la somme $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$ des n premiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. Pour alléger la rédaction, notons $S_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$, $V_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\mathcal{A}(n)$ l'assertion $S_n = V_n$.

2.1 Preuve par récurrence

- Il s'agit de prouver que $\mathcal{A}(n)$ est vraie quel que soit le naturel n ; nous allons raisonner par récurrence sur n .
- S_0 est nulle, puisque cette somme ne contient aucun terme ; et $V_0 = 0$ est clair. Donc $\mathcal{A}(0)$ est vraie.
- Supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Remarquons que $S_{n+1} = S_n + (n + 1)$; mais $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ par hypothèse, donc $S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$. En mettant $n + 1$ en facteur, nous obtenons $S_{n+1} = (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = (n + 1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, soit $S_{n+1} = V_{n+1}$: ceci établit $\mathcal{A}(n + 1)$.
- Nous pouvons maintenant conclure : par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie quel que soit le naturel n .

2.2 Commentaire

Notons bien les quatre étapes de la rédaction :

1. définition précise de l'assertion $\mathcal{A}(n)$;
2. initialisation de la récurrence : ici, on vérifie que $\mathcal{A}(0)$ est vraie ;
3. itération de la récurrence : on suppose $\mathcal{A}(n)$ acquise, et on en déduit $\mathcal{A}(n+1)$;
4. conclusion.

Il est d'usage de dire que $\mathcal{A}(n)$ est l'*hypothèse de récurrence*, puisque c'est elle qui sert de point de départ dans la troisième étape. Il existe des situations dans lesquelles l'hypothèse de récurrence n'est pas l'assertion dont on veut montrer qu'elle est vraie pour tout naturel n .

L'initialisation de la récurrence peut être plus compliquée. Par exemple, dans certains cas il faut vérifier non seulement $\mathcal{A}(0)$, mais aussi $\mathcal{A}(1)$.

Il existe des situations dans lesquelles la récurrence commence non pas à 0, mais à 1 : dans un tel cas, l'initialisation de la récurrence consiste à vérifier $\mathcal{A}(1)$.

2.3 Une preuve directe

Nous allons donner une preuve *directe* du résultat établi plus haut.

Considérons le tableau ci-contre :

1	1	...	$n-1$	n
n	$n-1$...	2	1

Observons que la somme des éléments de chacune des lignes du tableau est S_n , donc la somme de tous les éléments du tableau est $2S_n$. D'autre part, il est clair que la somme de chaque colonne du tableau est égale à $n+1$; comme le tableau comporte n colonnes, la somme de tous les éléments du tableau est égale à $n(n+1)$. Nous en déduisons $2S_n = n(n+1)$, soit $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque — La méthode utilisée est bien connue des comptables : lorsque l'on veut calculer la somme des éléments d'un tableau, on peut faire les totaux partiels par lignes ou par colonnes : le total général sera le même.

2.4 Une autre preuve directe

Considérons maintenant le tableau ci-contre :

La première ligne contient une «puce noire», la deuxième en contient deux, et ainsi de suite ; si le tableau compte n lignes (et autant de colonnes), alors la dernière ligne contient n puces. Au total, il y a donc S_n puces noires.

Observons que le tableau comporte n^2 cases, et que nous avons placé une puce noire dans chaque case située au-dessous de la diagonale, au sens large.

•					
•	•				
•	•	•			
•	•	•	•		
•	•	•	•	•	
•	•	•	•	•	•

Déposons maintenant une puce blanche dans chaque case située au-dessus de la diagonale, au sens large. Il y aura en tout $2S_n$ puces.

Nous remarquons que chaque case située sur la diagonale contient deux puces (une blanche et une noire), tandis que les autres cases contiennent une puce. Nous aurions pu réaliser ce remplissage d'une autre façon : en déposant d'abord une puce dans chaque case (il nous en faut n^2) ; puis en ajoutant une deuxième puce sur chaque case de la diagonale (il nous faut n puces de plus). Au total, le tableau contient donc $n^2 + n$, soit $n(n+1)$ puces.

Finalement, $2S_n = n(n+1)$, soit $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3 Un petit problème complet

Nous nous proposons d'établir l'inégalité $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$ pour $n \geq 2$.

Rappel — $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ désigne la somme des $1/k^2$, pour k allant de 1 à n . C'est une notation efficace pour désigner

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$. Remarquons que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}$ est égal à $\frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Une remarque avant de commencer : il est commode de donner des noms aux quantités que nous allons manipuler. Nous noterons donc $G_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $D_n = \frac{3n}{2n+1}$; les noms choisis indiquent qu'il s'agit des membres *gauche* et *droit* de l'inégalité à établir.

• Notons $\mathcal{A}(n)$ l'assertion $G_n > D_n$; il s'agit de prouver que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$. Nous allons raisonner par récurrence sur $n \geq 2$.

• Commençons par vérifier $\mathcal{A}(2)$. Nous avons $G_2 = 1 + 1/4 = 5/4$ et $D_2 = 6/5$; par réduction au même dénominateur, il vient $G_2 - D_2 = 5/4 - 6/5 = \frac{5 \times 5 - 6 \times 4}{4 \times 5} = \frac{25 - 24}{20} = \frac{1}{20} > 0$. Nous en déduisons $G_2 > D_2$, ce qui établit $\mathcal{A}(2)$.

• Supposons acquise l'inégalité $G_n > D_n$. Il s'agit d'établir $G_{n+1} > D_{n+1}$; pour ce faire, nous allons prouver que $G_{n+1} - D_{n+1}$ est strictement positif. Nous avons :

$$G_{n+1} - D_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{3n+3}{2n+3} = \frac{1}{(n+1)^2} + G_n - \frac{3n+3}{2n+3}$$

L'hypothèse de récurrence $G_n > D_n$ nous donne alors :

$$G_{n+1} - D_{n+1} > \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{3n}{2n+1} - \frac{3n+3}{2n+3}$$

Notons $\mathcal{E}(n)$ la quantité qui apparaît dans le membre de droite de l'inégalité précédente. Il nous *suffit* de montrer que $\mathcal{E}(n)$ est positive ou nulle. Pour ce faire, nous réduisons au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(n) &= \frac{(2n+1)(2n+3) + 3n(n+1)^2(2n+3) - 3(n+1)^3(2n+1)}{(n+1)^2(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{(4n^2 + 8n + 3) + (6n^4 + 21n^3 + 24n^2 + 9n) - (6n^4 + 21n^3 + 27n^2 + 15n + 3)}{(n+1)^2(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2(2n+3)(2n+1)} \end{aligned}$$

Il est clair que la dernière quantité que nous avons écrite est strictement positive, pour $n \geq 2$. Ceci établit $\mathcal{A}(n+1)$.

• Par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$, et la démonstration est terminée.

Remarque — Pour $n = 1$, l'inégalité est fautive : en effet, $G_1 = D_1 = 1$.

Remarque — Plus haut, nous avons dit qu'il *suffisait* d'établir $\mathcal{E}(n) \geq 0$. Il n'est peut-être pas *nécessaire* de le faire ; mais, en l'absence d'autre idée, on suit cette piste !

Remarque — La suite $(G_n)_{n \geq 1}$ est croissante, puisque $G_{n+1} - G_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Par ailleurs, elle est majorée par $3/2$ puisque $D_n = \frac{3n}{2n+1} < \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$. Donc cette suite converge. On peut montrer que sa limite est $\pi^2/6$.

4 Quelques applications

► Les questions suivantes sont «fermées», c'est-à-dire que l'énoncé contient le résultat à établir. Il n'en sera pas de même plus tard : nous poserons des questions «ouvertes», dans lesquelles il faut deviner quel est le résultat (formule, inégalité) à établir.

Exercice — Notons T_n la somme des carrés des n premiers naturels non nuls : $T_n = 1 + 4 + 9 + \dots + (n-1)^2 + n^2$. Prouvez la formule $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice — Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Prouvez que $\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)H_n - n$.

Exercice — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, établissez l'inégalité $|\sin(n\alpha)| \leq n|\sin(\alpha)|$. Indication : utilisez la formule $\sin(a+b) = \dots$.

5 Autour des nombres de Fibonacci

► La suite de FIBONACCI est définie par les relations $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

Question 1 Dressez un tableau donnant les valeurs de F_n , pour $0 \leq n \leq 10$.

Question 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. De combien de façons peut-on daller une allée de 2 mètres de large et n mètres de long, avec des dalles de 2 mètres par 1 ?

Question 3 Donnez une expression simple de $P_n = \sum_{k=1}^n F_k$. Indication : dressez un tableau donnant les valeurs de P_n , pour $0 \leq n \leq 6$; observez ce tableau et conjecturez la formule à établir.

Remarque — La technique proposée dans l'exercice précédent, et que l'on peut résumer par «aller à la pêche», est intéressante : elle montre que l'on peut, dans le cadre des mathématiques, suivre une démarche expérimentale, plus courante en physique ou en chimie par exemple. De nos jours, il est devenu banal d'avoir à sa disposition des moyens de calculs puissants, qui facilitent l'adoption de cette démarche.

Question 4 Donnez une expression simple de $R_n = F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2$. L'égalité obtenue est attribuée à CASSINI.

Remarque — Le choix des valeurs initiales F_0 et F_1 varie selon les sources ; certains auteurs préfèrent prendre $F_0 = F_1 = 1$, d'autres $F_0 = 1$ et $F_1 = 2$.

6 Un deuxième exemple

Nous allons montrer que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est multiple de 7, et ce quel que soit le naturel n .

• Notons $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ et $\mathcal{A}(n)$ l'assertion $\boxed{u_n \text{ est multiple de } 7}$. Nous allons montrer que $\mathcal{A}(n)$ est vraie quel que soit le naturel n ; nous raisonnerons par récurrence sur n .

• $u_0 = 3^1 + 2^2 = 3 + 4 = 7$ est multiple de 7, donc $\mathcal{A}(0)$ est vraie.

• Supposons $\mathcal{A}(n)$ acquise. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} \\ &= 7 \times 3^{2n+1} + 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) = 7 \times 3^{2n+1} + 2u_n \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, u_n est multiple de 7 ; il en est donc de même de $2u_n$; et comme $7 \times 3^{2n+1}$ est manifestement multiple de 7, nous en concluons que u_{n+1} est multiple de 7. Ceci établit $\mathcal{A}(n+1)$.

• Concluons : par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie quel que soit le naturel n .

Exercice — Montrez que $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est multiple de 11, et ce quel que soit le naturel n .

7 Quelques pièges du raisonnement par récurrence

• L'hypothèse de récurrence, que nous avons notée $\mathcal{A}(n)$ ou $\mathcal{P}(n)$, doit faire intervenir n d'une façon ou d'une autre. Si ce n'est pas le cas, c'est que vous êtes en train de rédiger une *preuve directe* !

• L'erreur de manœuvre la plus fréquente consiste à prendre une hypothèse de récurrence de la forme suivante :

$$\boxed{\mathcal{A}(n) \text{ est vraie pour tout naturel } n}$$

Autrement dit, on prend comme hypothèse ce que l'on doit précisément démontrer !

Notez bien que dans le raisonnement par récurrence, ou plus précisément dans l'étape «itération de la récurrence», on part d'une hypothèse $\mathcal{A}(n)$ et l'on établit une *nouvelle* assertion $\mathcal{A}(n+1)$.

• Et ne pas oublier l'initialisation de la récurrence !

8 Un exemple plus subtil

Nous nous proposons d'établir la propriété suivante :

Soient $n \geq 1$ et A une partie de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ de cardinal $n + 1$. On peut trouver dans A deux éléments p et q tels que p divise q .

Nous raisonnerons par récurrence sur $n \geq 1$: l'initialisation de la récurrence consistera donc à vérifier le cas $n = 1$. Nous noterons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion suivante :

Soit A une partie de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ de cardinal au moins égal à $n + 1$. On peut trouver dans A deux éléments p et q tels que p divise q .

Remarquez bien que cette assertion diffère de notre objectif ; mais il est clair que si nous arrivons à établir que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$, alors, d'après le principe «qui peut le plus peut le moins», nous aurons démontré le résultat espéré !

- Initialisation de la récurrence : si $n = 1$, alors $\llbracket 1, 2n \rrbracket = \{1, 2\}$; la seule partie de cardinal au moins égal à $n + 1 = 2$ est $\{1, 2\}$; alors $p = 1$ et $q = 2$ répondent à la question. Nous venons de vérifier $\mathcal{P}(1)$.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ acquise, et considérons une partie A de $\llbracket 1, 2(n+1) \rrbracket = \llbracket 1, 2n+2 \rrbracket$, de cardinal au moins $n + 2$. Nous allons examiner deux cas de figure.

- Si A ne contient pas simultanément $2n + 1$ et $2n + 2$, alors l'ensemble B des éléments de A au plus égaux à $2n$ est une partie de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$, de cardinal au moins égal à $n + 1$. L'hypothèse de récurrence affirme que l'on peut trouver p et q dans B tels que p divise q ; mais B est une partie de A , donc p et q appartiennent à A , si bien que ce cas est réglé.
- Si A contient simultanément $2n + 1$ et $2n + 2$, notons B l'ensemble A privé de $2n + 1$ et $2n + 2$: c'est une partie de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$, de cardinal au moins n . Examinons deux sous-cas :
 - si B contient $n + 1$, alors $p = n + 1$ et $q = 2n + 2$ conviennent ;
 - sinon, notons $C = B \cup \{n + 1\}$: C est une partie de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$, de cardinal au moins $n + 1$: de par l'hypothèse de récurrence, on peut trouver p et q dans C , tels que p divise q . Si p et q sont dans B , c'est fini ; sinon, c'est que $q = n + 1$; dans ce cas, p divise $n + 1$, qui divise $2n + 2$: donc p divise $2n + 2$, or ces deux nombres appartiennent à A .

Ainsi, dans tous les cas, il existe deux éléments p et q de A tels que p divise q : ceci établit $\mathcal{P}(n + 1)$.

- Par récurrence, nous avons établi que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Remarque — La valeur $n + 1$ est optimale. En effet, dans l'intervalle $\llbracket 1, 2n \rrbracket$, il existe une partie de cardinal n qui ne vérifie pas la condition de l'exercice : c'est l'intervalle $\llbracket n + 1, 2n \rrbracket$.

9 Un petit problème

► Définissons une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de ses trois premiers termes $T_0 = 2$, $T_1 = 3$, $T_2 = 6$ et la relation $T_n = (n + 4)T_{n-1} - 4nT_{n-2} + (4n - 8)T_{n-3}$ pour $n \geq 3$.

Question 1 Dressez un tableau donnant la valeur de T_n pour $0 \leq n \leq 8$; vous vérifierez que $T_9 = 363392$.

Question 2 T_n est la somme des termes généraux f_n et p_n de deux suites bien connues. Devinez lesquelles.

Question 3 Donnez une preuve de la formule que vous venez de conjecturer !