Systèmes d'équations linéaires

Table des matières

Connaissances requises : algèbre linéaire, calcul matriciel.

1 Brève introduction

La résolution des systèmes d'équations linéaires est un problème important, de par ses multiples applications :

- illustration du cours d'algèbre linéaire et de calcul matriciel ;
- méthodes numériques de résolution de tels systèmes ;
- méthodes formelles, pour une résolution *exacte*.

Mentionnons le cas (fréquent) des systèmes de grande taille, mais dont la matrice est *creuse*, au sens suivant : le nombre de coefficients non nuls de la matrice du système est un $\mathcal{O}(n)$, pour une matrice carrée d'ordre n.

2 Définitions

Un *système d'équation linéaires* à n équations et p inconnues a l'allure suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où les $a_{i,j}$, les x_j et les b_i sont dans $\mathbb{K}$.
Les x_j sont les *inconnues* de ce système, qui peut se mettre sous la forme matricielle $A \cdot X = B$; de ce point de vue, A est la *matrice* du système, X est l'inconnue et B est le second membre.
Une situation plus générale consiste à choisir les $a_{i,j}$ dans $\mathbb{K}$ et les b_i dans un espace vectoriel F ; les inconnues sont alors à déterminer dans F.

3 Systèmes à matrice carrée

3.1 Vocabulaire

Si $n = p$, la matrice A est carrée : il y a autant d'équations que d'inconnues. A est donc la matrice d'un endomorphisme Φ de $\mathbb{K}^n$. Deux cas peuvent se présenter :

- A est inversible : alors Φ est un automorphisme, donc il existe un et un seul vecteur $X = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ vérifiant $\Phi(X) = B$. Le système possède une et une seule solution. Un tel système est dit *de Cramer*.
- A n'est pas inversible : alors Φ n'est pas un automorphisme, et son noyau ne se réduit pas au vecteur nul de $\mathbb{K}^n$. Le système posséde une infinité de solutions, ou aucune solution.

3.2 Systèmes à matrice triangulaire

Soit (S) un système à matrice carrée d'ordre n. Au moyen d'opérations élémentaires sur les équations, nous pouvons nous ramener à un système dont la matrice est triangulaire supérieure. Le coût de cette transformation est un $\mathcal{O}(n^3)$.

Supposons que la matrice du système est triangulaire supérieure. Elle est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont *tous* non nuls. Dans ce cas, la résolution se fait par *remontée* :

- la dernière équation nous donne x_n ;
- par substitution, l'avant-dernière nous donne x_{n-1} ;
- en continuant la remontée, nous obtenons x_{n-2}, x_{n-3} et ainsi de suite jusqu'à x_1.

Le coût de cette remontée est un $\mathcal{O}(n^2)$.

4 Systèmes sous-déterminés ou sur-déterminés

4.1 Systèmes sous-déterminés

Lorsque $n < p$, le système est *sous-déterminé* : il comporte plus d'inconnues que d'équations. Dans ce cas, on peut en général exprimer n inconnues en fonction des $p - n$ autres.

Voici un exemple : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

Les solutions sont les triplets (a, a, a) où $a \in \mathbb{K}$.

4.2 Systèmes sur-déterminés

Lorsque $n > p$, le système est *sur-déterminé* : il comporte moins d'inconnues que d'équations. En général, un tel système n'a pas de solution.

Voici un exemple : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & 1 \end{array}\right.$

On résout le système (carré) formé des trois premières équations ; l'unique solution est $(1, 1, 1)$; on vérifie que ce triplet est solution de la quatrième équation.

5 Systèmes à matrice carrée d'ordre 2 ou 3

5.1 Systèmes de deux équations à deux inconnues

Un tel système s'écrit $\left\{\begin{array}{rcrcl} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & = & b_2 \end{array}\right.$

Son déterminant est $D = \left|\begin{array}{ccc} a_{1,1} & + & a_{1,2} \\ a_{2,1} & + & a_{2,2} \end{array}\right| = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$

Si le déterminant n'est pas nul, le système possède l'unique solution :

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix} \qquad x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Observons que les expressions des solutions sont obtenues en remplaçant, dans le déterminant du système, la colonne des coefficients de l'inconnue par le membre de droite du système.

Si le déterminant est nul, deux cas peuvent se présenter :

- les deux équations sont proportionnelles : le système se réduit (par exemple) à l'unique équation $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_1 = b_1$. En général, l'un des coefficients $a_{1,1}$ ou $a_{1,2}$ n'est pas nul, donc on peut exprimer (par exemple) x_1 en fonction de x_2. Le système comporte une infinité de solutions, dont l'ensemble est une droite affine de $\mathbb{K}^2$.
- les deux équations ne sont pas proportionnelles : alors le système n'a pas de solution.

5.2 Systèmes de trois équations à trois inconnues

Un tel système aura l'allure suivante : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & = & b_2 \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & = & b_n \end{cases}$

Le déterminant du système est $D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \end{vmatrix}$

Si le déterminant n'est pas nul, les expressions des inconnues sont semblables à celles du cas précédent :

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{2,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \qquad x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix} \qquad x_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ b_{2,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

5.3 Systèmes d'ordre 4 ou plus

La théorie générale des déterminants n'est pas au programme de la classe de PCSI ; mais elle est au programme de la classe de deuxième année.

Cette théorie fournit des méthodes formelles et des méthodes numériques pour le calcul des déterminants, et pour la résolution des systèmes d'équations linéaires. Un autre problème abordé est le calcul (exact ou approché) des *valeurs propres* et des *vecteurs propres* d'une matrice carrée ; ces valeurs jouent un rôle crucial dans l'étude des structures (ponts, tours, aéronefs, navires).

L'exposé des méthodes efectives pour ces problèmes relève des niveaux L3 et M1 de l'enseignement supérieur.

6 Systèmes avec paramètre(s)

Dans un système avec paramètres, on demande de déterminer uniquement certaines des inconnues ; les autres sont des *paramètres*, en fonction desquels seront exprimées les inconnues.

Voici un exemple : $\begin{cases} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 1 \\ (2\lambda+1)x & + & 3y & + & (\lambda+2)z & = & 3 \end{cases}$

Si $\lambda = 1$, le système se réduit à $x + y + x = 1$; l'ensemble des solutions est un plan affine.

Si $\lambda = -2$, le système n'a pas de solution.

Sinon, le système possède l'unique solution $x = y = z = \dfrac{1}{\lambda + 2}$.

FIN