

## Énoncé

► Notons  $S_{n,p}$  le nombre de surjections de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .

Q1 Déterminez  $S_{n,1}$ ,  $S_{n,n}$  et  $S_{n,p}$  pour  $p > n$ .

Q2 Prouvez que  $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$ .

Q3 En déduire que  $S_{n+1,n} = \frac{n}{2}(n+1)!$  et que  $S_{n+2,n} = \frac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$ .

Q4 Dressez un tableau donnant la valeur de  $S_{n,p}$  pour  $(n, p) \in \llbracket 1, 5 \rrbracket^2$ .

Q5 Établissez  $S_{n,p} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n$ .

## Corrigé

Q1 Il existe une et une seule surjection  $s : \llbracket 1, n \rrbracket \mapsto \llbracket 1, p \rrbracket$ , définie par  $s(k) = 1$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Donc  $S_{n,1} = 1$ .

Toute surjection  $s : \llbracket 1, n \rrbracket \mapsto \llbracket 1, n \rrbracket$  est injective, donc bijective ; inversement, toute bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sur lui-même est surjective. Donc  $S_{n,n} = n!$ .

Enfin, soit  $s : \llbracket 1, n \rrbracket \mapsto \llbracket 1, p \rrbracket$ , avec  $n < p$ . L'image de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  par  $s$  compte au plus  $n$  éléments ; comme  $n < p$ ,  $s$  ne peut être surjective, donc  $S_{n,p} = 0$ .

Q2 Soit  $s : \llbracket 1, n \rrbracket \mapsto \llbracket 1, p \rrbracket$  surjective. Supposons, pour fixer les idées, que  $s(n) = p$ . La restriction de  $t$  à  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  est, soit une surjection de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  sur  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , s'il existe  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  tel que  $s(k) = p$  ; soit une surjection de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  sur  $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$  dans le cas contraire. Il existe donc au total  $S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}$  surjections de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sur  $\llbracket 1, p \rrbracket$  qui envoient  $n$  sur  $p$ . Par raison de symétrie, il y en a autant qui envoient  $n$  sur  $k$ , et ce pour chaque  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . D'où la formule  $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$ .

Q3 • Prouvons, par récurrence sur  $n \geq 1$ , que  $S_{n+1,n} = \frac{n}{2}(n+1)!$ . Pour  $n = 1$ , on a  $S_{2,1} = 1$  et  $\frac{1}{2}(1+1)! = 1$  : la formule est vraie. Supposons-la exacte au rang  $n$ , soit  $S_{n+1,n} = \frac{n}{2}(n+1)!$  ; alors

$$S_{n+2,n+1} = (n+1)(S_{n+1,n+1} + S_{n+1,n}) = (n+1)\left((n+1)! + \frac{n}{2}(n+1)!\right) = (n+1)\frac{n+2}{2}(n+1)!$$

soit  $S_{n+2,n+1} = \frac{n+1}{2}((n+1)+1)!$  : la formule est encore vraie au rang  $n+1$ .

• Procédons à nouveau par récurrence sur  $n \geq 1$  pour établir  $S_{n+2,n} = \frac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$ . Pour  $n = 1$ , on a  $S_{3,1} = 1$  et  $\frac{1(3+1)}{24}(1+2)! = \frac{4 \cdot 3!}{24} = 1$ , donc la formule est exacte. Supposons-la acquise au rang  $n$  ; alors :

$$\begin{aligned} S_{n+3,n+1} &= (n+1)(S_{n+2,n+1} + S_{n+2,n}) = (n+1)\left(\frac{n+1}{2}(n+2)! + \frac{n(3n+1)}{24}(n+2)!\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{12(n+1) + n(3n+1)}{24}\right)(n+2)! = (n+1)\frac{3n^2 + 13n + 12}{24}(n+2)! \\ &= (n+1)\frac{(3n+4)(n+3)}{24}(n+2)! = (n+1)\frac{3n+4}{24}(n+3)! = (n+1)\frac{3(n+1)+1}{24}((n+2)+1)! \end{aligned}$$

ce qui établit la formule au rang  $n+1$ .

Q4 Les formules établies en Q1 et Q2 permettent, de proche en proche, de remplir les cases du tableau ci-contre. La valeur de  $S_{n,p}$  se trouve à l'intersection de la ligne  $p$  et de la colonne  $n$ . Nous utilisons Q1 pour remplir la première ligne, la diagonale, et les cases situées sous la diagonale. Q2 permet de remplir les cases restantes, colonne par colonne, en allant de gauche à droite.

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	0	2	6	14	30
3	0	0	6	36	150
4	0	0	0	24	240
5	0	0	0	0	120

Q5] Notons  $\mathcal{P}_n$  l'assertion  $\boxed{\text{pour tout } p \geq 1, \text{ on a } S_{n,p} = T_{n,p}}$  où  $T_{n,p} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n$ . Prouvons, par récurrence sur  $n \geq 1$ , que cette assertion est vraie quel que soit  $n \geq 1$ . Remarquons que  $T_{n,p} = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n$ .

• Vérifions  $\mathcal{P}_1$ . Pour  $p = 1 : S_{1,1} = 1$  et  $T_{1,1} = \sum_{k=1}^1 \binom{1}{k} (-1)^{1-k} k^1 = \binom{1}{1} (-1)^{1-1} 1 = 1$ . Pour  $p > 1, S_{1,p} = 0$  et

$$\begin{aligned} T_{1,p} &= \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k = (-1)^p \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^k k = (-1)^p \sum_{k=1}^p (-1)^k k \binom{p}{k} \\ &= (-1)^p \sum_{k=1}^p (-1)^k p \binom{p-1}{k-1} = (-1)^p p \sum_{k=1}^p (-1)^k \binom{p-1}{k-1} = (-1)^p p \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{k+1} \binom{p-1}{k} \\ &= (-1)^{p+1} p \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (-1)^k 1^{p-1-k} = (-1)^{p+1} p (1-1)^{p-1} = 0 \end{aligned}$$

• Supposons  $\mathcal{P}_n$  acquise, et établissons  $\mathcal{P}_{n+1}$ . Pour  $p = 1 : S_{n+1,1} = 1$  et  $T_{n+1,1} = \sum_{k=1}^1 \binom{1}{k} (-1)^{1-k} k^{n+1} = 1$ .

Si  $p > 1$ , alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1,p} &= p(S_{n,p} + S_{n,p-1}) = p(T_{n,p} + T_{n,p-1}) \\ &= p \left( \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p-1}{k} (-1)^{p-1-k} k^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} p \left( \binom{p}{k} - \binom{p-1}{k} \right) (-1)^{p-k} k^n + p \binom{p}{p} (-1)^{p-p} p^n \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} p \frac{k}{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n \binom{p}{p} (-1)^{p-p} p^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^{n+1} = T_{n+1,p} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de  $\mathcal{P}_{n+1}$ . Nous avons utilisé au passage

$$\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} - \frac{(p-1)!}{k!(p-1-k)!} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \left(1 - \frac{p-k}{p}\right) = \frac{k}{p} \binom{p}{k}$$

**FIN**