

Suites réelles et complexes

Table des matières

1 Généralités	1
1.1 Qu'est-ce qu'une suite?	1
1.2 Différents modes de définition d'une suite	2
1.3 Opérations sur les suites	2
1.4 Un peu de vocabulaire	2
2 Convergence et limite d'une suite de réels	3
2.1 Définition de la convergence et de la limite	3
2.2 Premières propriétés	3
2.3 Opérations sur les limites	3
3 Suites extraites, suites adjacentes	4
3.1 Suites extraites	4
3.2 Théorème de la limite monotone	5
3.3 Suites adjacentes	5
4 Quelques compléments	6
4.1 Suites de réels divergentes vers $\pm\infty$	6
4.2 Suites de complexes	6
5 Comparaison des suites	6
5.1 Relation «est négligeable devant»	6
5.2 Comparaison de quelques suites de référence	6
5.3 Relation «est équivalente à»	7
5.4 Relation «est un grand \mathcal{O} de»	7
6 Suites définies par l'itération d'une fonction	7
6.1 Suites récurrentes linéaires du premier ordre	8
6.2 Suites récurrentes linéaires du deuxième ordre	8
7 Trois exercices corrigés	8
7.1 La série harmonique alternée	8
7.2 Une suite croissante	9
7.3 Une suite définie implicitement	9

1 Généralités

1.1 Qu'est-ce qu'une suite?

Définition : soit E un ensemble. Une *suite* d'éléments de E est une fonction u de \mathbb{N} dans E . Nous la noterons aussi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$; nous parlerons également de la *suite de terme général* u_n .

Cette définition est trop restrictive puisque, par exemple, elle ne permet pas de parler de la suite de terme général $1/n$. Nous nous autoriserons donc à manipuler des suites dont le terme général u_n est défini à *partir d'un certain rang* (en abrégé: APCR). Par exemple, la suite de terme général $1/n$ est définie à parti du rang 1, et peut donc être notée $(1/n)_{n \geq 1}$.

En pratique, un laxisme très courant nous autorise à noter (u_n) la suite, sans expliciter précisément le rang à partir duquel elle est définie.

Nous nous intéressons essentiellement aux suites de réels. Nous donnerons également quelques notions sur les suites de complexes. D'autre part, nous aurons l'occasion de rencontrer des suites de *vecteurs*, de *matrices*, de *fonctions* (ce dernier cas menant par exemple à la théorie de FOURIER).

1.2 Différents modes de définition d'une suite

La façon la plus simple de définir une suite est de donner une formule permettant de calculer son terme général ; par exemple, nous pouvons parler de la suite de terme général $u_n = (n+1)2^{-n}$.

Une autre façon très courante de définir une suite consiste à donner le premier terme (disons u_0) et une formule permettant de calculer u_{n+1} en fonction de u_n . Voici un exemple : la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \exp(u_n)$.

Une façon un peu plus compliquée consiste à définir le terme général de la suite, comme la solution d'une équation dans laquelle n apparaît comme *paramètre*. Si cette équation est bien choisie, elle possède une et une seule solution, pour tout n . C'est le cas par exemple de la suite de terme général $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où x_n est l'unique solution de l'équation $\exp(-x) = nx$.

1.3 Opérations sur les suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels, définies respectivement à partir des rangs n_1 et n_2 , et λ un réel. Nous pouvons alors définir les suites $u+v$, λu et $u \times v$ comme suit : $(u+v)_n = u_n + v_n$ pour $n \geq \max(n_1, n_2)$; $(\lambda u)_n = \lambda u_n$ pour $n \geq n_1$; et $(u \times v)_n = u_n v_n$ pour $n \geq \max(n_1, n_2)$.

Nous pouvons également appliquer une fonction f à une suite (u_n) , à condition qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les u_n sont dans l'ensemble de définition de f . Par exemple, en appliquant la fonction \ln à la suite de terme général $u_n = n$, nous obtenons la suite $(\ln(n))_{n \geq 1}$.

1.4 Un peu de vocabulaire

Nous dirons qu'une suite de réels (u_n) est :

- *croissante* si $u_{n+1} \geq u_n$ quel que soit n ; exemples : $n, n^2, n!, e^n, \ln(n)$;
- *croissante APCR* s'il existe un indice n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $u_{n+1} \geq u_n$; exemples : $n, n^2, n!, e^n, \ln(n)$;
- *décroissante* si $u_{n+1} \leq u_n$ quel que soit n ; exemples : $1/n, 1/n^2, e^{-n}$;
- *strictement croissante* si $u_{n+1} > u_n$ quel que soit n ;
- *strictement décroissante* si $u_{n+1} < u_n$ quel que soit n ;
- *monotone* si elle est croissante ou décroissante ;
- *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante ;
- *constante* si $u_{n+1} = u_n$ quel que soit n ;
- *stationnaire* s'il existe un rang n_0 tel que $u_{n+1} = u_n$ quel que soit $n \geq n_0$; remarquons que «stationnaire» veut dire «constante APCR» ;
- *périodique*, de période $p > 0$, si $u_{n+p} = u_n$ quel que soit n ; exemple : $(-1)^n$;
- *périodique APCR*, de période $p > 0$, s'il existe un rang n_0 tel que $u_{n+p} = u_n$ quel que soit $n \geq n_0$;
- *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ quel que soit n ; exemples : $(-1)^n, /\cos(n)$;
- *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ quel que soit n ;
- *bornée* s'il existe $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ quel que soit n .

Exercice : exhibez une suite qui n'est ni croissante, ni décroissante, ni majorée, ni minorée.

Remarque : une suite de réels (u_n) est croissante ssi $u_{n+k} \geq u_n$ quels que soient n et k entiers.

2 Convergence et limite d'une suite de réels

2.1 Définition de la convergence et de la limite

Définition : soient (u_n) une suite de réels et $\ell \in \mathbb{R}$. Nous dirons que la suite (u_n) converge vers ℓ , et nous noterons $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$, ou encore $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$, si :

quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_ε tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.

Voici une autre formulation : la suite (u_n) converge vers ℓ ssi, quel que soit $\varepsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de termes qui ne sont pas dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

2.2 Premières propriétés

Proposition : la limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Preuve : par l'absurde. Supposons que (u_n) possède deux limites ℓ et ℓ' distinctes. Notons $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3}$. Comme (u_n) converge vers ℓ , il existe un rang n_ε à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. De même, il existe un rang n'_ε à partir duquel $|u_n - \ell'| \leq \varepsilon$. Alors, pour $n \geq \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, nous aurons :

$$3\varepsilon = |\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \leq 2\varepsilon$$

Ce qui nous donne $3 \leq 2$, puisque $\varepsilon > 0$. D'où la contradiction.

Proposition : modifier un nombre fini de termes de la suite (u_n) ne change ni sa convergence, ni sa limite.

Preuve : supposons (u_n) convergente vers ℓ . Notons (v_n) la suite déduite de (u_n) par modification d'un nombre fini de ses termes, et N le plus grand indice d'un terme modifié. Soit $\varepsilon > 0$; il existe un rang n_ε à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Alors, pour $n \geq \max(N + 1, n_\varepsilon)$, nous aurons $|v_n - \ell| = |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Proposition : une suite u converge vers 0 ssi la suite $|u|$ converge vers 0.

Preuve : il suffit de remarquer que $||u_n| - 0| = |u_n - 0|$.

Proposition : toute suite convergente est bornée.

Preuve : notons ℓ la limite de la suite, et fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_ε un rang à partir duquel tous les termes sont dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. L'ensemble des termes qui ne sont pas dans cet intervalle est donc fini, et par suite borné. Notons m (resp. M) un minorant (resp. un majorant) de cet ensemble. Alors $\min(m, \ell - \varepsilon) \leq u_n \leq \max(M, \ell + \varepsilon)$ pour tout n .

Remarque : la réciproque est fautive, comme le montre la suite de terme général $(-1)^n$: pour $\ell \geq 0$, nous aurons $|(-1)^{2n+1} - \ell| \geq 1 > 1/2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. La suite possède donc une infinité de termes situés hors de l'intervalle $[\ell - 1/2, \ell + 1/2]$. Raisonement analogue si $\ell \leq 0$.

Proposition : si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et si v est bornée, alors $(u_n v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Preuve : soit $M \geq 0$ un majorant de la suite de terme général $|v_n|$. Fixons $\varepsilon > 0$; soit n_ε un rang à partir duquel $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M+1}$. Alors $|u_n v_n| \leq \frac{M\varepsilon}{M+1} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.

2.3 Opérations sur les limites

Proposition : soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' . Alors la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.

Preuve : fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_ε (resp. n'_ε) à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ (resp. $|v_n - \ell'| \leq \varepsilon/2$). Du coup, pour $n \geq \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, nous aurons :

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Proposition : soient (u_n) une suite qui converge vers ℓ et λ un réel. La suite de terme général λu_n converge vers $\lambda \ell$.

Preuve : fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_ε à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda|}$. Alors, pour $n \geq n_\varepsilon$, nous aurons :

$$|\lambda u_n - \lambda \ell| = |\lambda| \times |u_n - \ell| \leq |\lambda| \times \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda|} \leq \varepsilon$$

Proposition : soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' . Alors la suite de terme général $u_n v_n$ converge vers $\ell \times \ell'$.

Preuve : fixons $\varepsilon > 0$. La suite (u_n) converge, donc est bornée : soit M majorant $|u_n|$ pour tout n . Il existe un rang n_ε (resp. n'_ε) à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2M+1}$ (resp. $|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2|\ell'|+1}$). Alors, pour $n \geq \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon)$, nous aurons :

$$|u_n v_n - \ell \ell'| = |u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)| \leq |u_n| \times |v_n - \ell'| + |\ell'| \times |u_n - \ell| \leq M \times \frac{\varepsilon}{2M+1} + \frac{|\ell'| \varepsilon}{2|\ell'|+1} \leq \varepsilon$$

Proposition : si la suite (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $u_n \geq \ell/2$ APCR.

Preuve : fixons $\varepsilon = \ell/2$. Il existe un rang n_ε à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, soit $-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon$, et donc $u_n \geq \ell/2$.

Proposition : si les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers ℓ et $\ell' \neq 0$, alors on peut parler de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ et cette dernière converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

Preuve : sans perte de généralité, nous pouvons supposer $\ell' > 0$. D'après le résultat précédent, il existe un rang n_1 à partir duquel $v_n \geq \ell'/2$ (et donc $v_n > 0$). Fixons $\varepsilon > 0$. La convergence des deux suites implique l'existence d'un rang n_ε à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \frac{\ell' \varepsilon}{4}$ et $|v_n - \ell'| \leq \frac{\ell' \varepsilon}{2(|\ell|+1)}$. Alors, à partir du rang $\max(n_1, n_\varepsilon)$, nous aurons :

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'} \right| = \frac{|u_n \ell' - v_n \ell|}{|v_n| \times |\ell'|} = \frac{|(u_n - \ell)\ell' + \ell(\ell' - v_n)|}{|v_n| \times |\ell'|} \leq \frac{|u_n - \ell|}{v_n} + \frac{|\ell| \times |v_n - \ell'|}{v_n \times \ell'} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Proposition : si u est à termes positifs et converge vers ℓ , alors $\ell \geq 0$.

Preuve : par l'absurde : supposons $\ell < 0$. Alors, d'après la proposition 2.3, nous aurions $u_n \leq \ell/2$ à partir d'un certain rang, ce qui contredirait le fait que la suite soit à termes positifs.

Théorème : (des trois suites). Soient (a_n) , (b_n) et (c_n) trois suites de réels. Si (a_n) et (c_n) convergent vers une même limite ℓ , et si $a_n \leq b_n \leq c_n$ APCR, alors (b_n) converge vers ℓ .

Preuve : nous avons $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$ APCR. Comme la suite de terme général $c_n - a_n$ converge vers 0, il en est de même de celle de terme général $b_n - a_n$, donc (b_n) converge vers la limite commune de (a_n) et (c_n) .

Ce théorème porte un tas de noms folkloriques, qu'il est recommandé de ne pas utiliser. Lorsque vous appliquez ce théorème, contentez-vous de la formule «par encadrement, nous avons la convergence souhaitée».

Théorème : soient : I un intervalle de \mathbb{R} ; (u_n) une suite à valeurs dans I , APCR ; et f une fonction continue de I dans \mathbb{R} . Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.

Ce théorème sera admis (provisoirement) ; il fera l'objet d'une preuve dans le chapitre consacré aux fonctions continues.

3 Suites extraites, suites adjacentes

3.1 Suites extraites

Définition : une *extraction* est une fonction $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Exemples : les fonctions $n \mapsto n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto 2^n$ et $n \mapsto p_n$ (où p_n désigne le n -ième nombre premier) sont des extractions.

Proposition : toute extraction s vérifie $s(n) \geq n$ pour tout n .

Preuve : par récurrence. Nous avons déjà $s(0) \geq 0$. Supposons $s(n) > n$ acquise ; alors $s(n+1) > s(n) \geq n$, donc $s(n+1) > n+1$.

Définition : une suite v est *extraite* d'une suite u s'il existe une extraction s telle que $v = u \circ s$, c'est-à-dire $v_n = u_{s(n)}$ pour tout n .

Proposition : la composée de deux extractions est une extraction.

Conséquence : si w est extraite d'une suite v , elle-même extraite d'une suite u , alors w est également extraite de u .

Remarque : la composition d'extractions se fait *de gauche à droite*. Donnons un exemple : $s : n \mapsto 2n$ et $t : n \mapsto n^2$ sont deux extractions. Appliquons-les dans cet ordre à une suite $u = (u_0, u_1, u_2, u_3, \dots)$; nous aurons

$$v = u \circ s = (u_{s(0)}, u_{s(1)}, u_{s(2)}, u_{s(3)}, \dots) = (u_0, u_2, u_4, u_6, \dots)$$

Puis :

$$\begin{aligned} w &= v \circ t = (v_{t(0)}, v_{t(1)}, v_{t(2)}, v_{t(3)}, \dots) = (v_0, v_1, v_4, v_9, \dots) \\ &= (u_0, u_2, u_8, u_{18}, \dots) = (u_{s(t(0))}, u_{s(t(1))}, u_{s(t(2))}, u_{s(t(3))}, \dots) \\ &= (u_{(s \circ t)(0)}, u_{(s \circ t)(1)}, \dots) \end{aligned}$$

Donc $w = u \circ s \circ t$.

Proposition : une suite u converge vers ℓ ssi toute suite v extraite de u converge vers ℓ .

Ce théorème sert à montrer qu'une suite u ne converge pas vers ℓ : il suffit d'exhiber *une* suite v extraite de u , qui ne converge pas vers ℓ .

Exemple : la suite de terme général $(-1)^n$ ne converge pas, puisque la suite extraite des termes d'indice pair converge vers 1, tandis que la suite extraite des termes d'indice impair converge vers -1 .

Proposition : si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers une même limite ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ .

Preuve : fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_ε (resp. n'_ε) tel que $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ (resp. $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$) pour tout $n \geq n_\varepsilon$ (resp. $n \geq n'_\varepsilon$). Donc pour $n \geq \max(2n_\varepsilon, 2n'_\varepsilon + 1)$, nous aurons $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

3.2 Théorème de la limite monotone

Théorème : (de la limite monotone) toute suite de réels croissante et majorée converge.

Ce théorème sera admis. Il nous est indispensable pour la preuve du théorème des suites adjacentes.

3.3 Suites adjacentes

Définition : deux suites (a_n) et (b_n) de réels sont dites *adjacentes* si elles vérifient les propriétés suivantes :

- (a_n) est croissante ;
- (b_n) est décroissante ;
- la suite de terme général $b_n - a_n$ converge vers 0.

Théorème : (des suites adjacentes) si deux suites de réels sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite.

Preuve : commençons par montrer que $b_n \geq a_n$ pour tout n : si ce n'était pas le cas, il existerait un rang n_0 tel que $b_{n_0} - a_{n_0} < 0$. Compte tenu du sens de variation des deux suites, nous aurions $b_n - a_n \leq b_{n_0} - a_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$, et ceci contredirait la convergence de $b_n - a_n$ vers 0.

Nous en déduisons $a_n \leq b_p$ quels que soient les indices n et p . En effet $a_n \leq a_{n+p} \leq b_{n+p} \leq b_p$. Mais alors la suite (a_n) est croissante et majorée (par b_0), donc elle converge ; de même, (b_n) , qui est décroissante et minorée (par a_0) converge.

Comme la suite de terme général $b_n - a_n$ converge vers 0, nous pouvons conclure que les deux suites (a_n) et (b_n) ont la même limite.

Exemple : nous étudions la *série harmonique alternée* (qui a été étudiée plus haut, au 3.3) ; son terme général

est $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. Ses premiers termes sont 1, 1/2, 5/6 et 7/12. Notons $a_n = S_{2n}$ et $b_n = S_{2n+1}$; nous constatons que :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{0 \leq k \leq 2n+2} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{0 \leq k \leq 2n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0 \\ b_{n+1} - b_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{0 \leq k \leq 2n+3} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{0 \leq k \leq 2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} > 0 \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite (a_n) est décroissante, tandis que la suite (b_n) est croissante. Observons que $a_n - b_n = S_{2n} - S_{2n+1} = \sum_{0 \leq k \leq 2n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{0 \leq k \leq 2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{2n+2}$ qui converge manifestement vers 0. Donc les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite. On peut montrer que celle-ci est $\ln(2)$.

4 Quelques compléments

4.1 Suites de réels divergentes vers $\pm\infty$

Définition : nous dirons que la suite de réels (u_n) diverge vers $+\infty$ si, pour tout réel M , il existe un rang n_M à partir duquel $u_n \geq M$.

Exemples : les suites de termes généraux respectifs $n, n^2, 2^n, n!$ divergent vers $+\infty$.

Proposition : si (u_n) diverge vers $+\infty$, et si $v_n \geq u_n$ APCR, alors (v_n) diverge vers $+\infty$. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, et si (v_n) est bornée ou diverge vers $+\infty$, alors la suite de terme général $u_n + v_n$ diverge vers $+\infty$.

Proposition : soit (u_n) une suite de réels croissante. Si cette suite est majorée, alors elle converge ; sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Preuve : le premier cas découle du théorème 3.2. Pour le deuxième cas : soit $M \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un indice n_M tel que $u_{n_M} \geq M$; mais la suite est croissante, donc $u_n \geq M$ pour tout $n \geq n_M$.

4.2 Suites de complexes

Proposition : soit (u_n) une suite de complexes et $z \in \mathbb{C}$. La suite (u_n) converge vers z ssi la suite de terme général $x_n = \Re(u_n)$ (resp. $y_n = \Im(u_n)$) converge vers $a = \Re(z)$ (resp. $b = \Im(z)$).

Preuve : sens direct : $|x_n - a| \leq |u_n - z|$, donc, si (u_n) converge vers z , alors (x_n) converge vers a ; par raison de symétrie, (y_n) converge vers b . Réciproque : supposons que (x_n) (resp. (y_n)) converge vers a (resp. b). Alors :

$$|u_n - z|^2 = |(x_n + iy_n) - (a + ib)|^2 = |(x_n - a) + i(y_n - b)|^2 = |x_n - a|^2 + |y_n - b|^2$$

Le dernier terme converge vers 0, donc $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

5 Comparaison des suites

Remarque : toutes les suites considérées dans cette partie sont à termes non nuls APCR.

5.1 Relation «est négligeable devant»

Définition : la suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n) si la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 0.

Ceci a bien sens, puisque (v_n) est à termes non nuls APCR.

Notation : nous noterons $u_n = o(v_n)$, et nous dirons que u_n est un petit o de v_n lorsque n tend vers l'infini.

Proposition : la relation «est négligeable devant» est transitive ; elle est, en un certain sens, compatible avec l'addition et la multiplication : si u_n et v_n sont des $o(x_n)$, alors $u_n + v_n = o(x_n)$; si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n x_n = o(v_n x_n)$.

Remarque : on peut avoir $u_n() = o(x_n)$ et $v_n = o(y_n)$, sans avoir $u_n + v_n = o(x_n + y_n)$.

5.2 Comparaison de quelques suites de référence

Nous nous proposons de comparer les suites de termes généraux respectifs $n^a, (\ln n)^b, c^n, n!$. Commençons par établir un résultat utile pour la suite.

Proposition : soit (u_n) une suite à termes non nuls APCR. S'il existe un réel $k \in [0, 1[$ tel que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq k$ APCR, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Preuve : soit n_0 un rang à partir duquel l'inégalité est vérifiée. Alors, pour $n \geq n_0$, nous aurons :

$$\left| \frac{u_n}{u_{n_0}} \right| = \left| \prod_{0 \leq j < n - n_0} \frac{u_{j+1}}{u_j} \right| = \prod_{0 \leq j < n - n_0} \left| \frac{u_{j+1}}{u_j} \right| \leq \prod_{0 \leq j < n - n_0} k = k^{n - n_0}$$

Donc la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0 ; il en est donc de même de la suite (u_n) .

Proposition : soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 1$. Alors $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$, $n^\beta = o(\gamma^n)$ et $\gamma^n = o(n!)$.

Preuve : $\frac{\ln^\alpha(n)}{n^\beta} = \frac{\ln^\alpha(n)}{(n^{\beta/\alpha})^\alpha} = \left(\frac{\ln(n)}{n^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\ln(n^{\beta/\alpha})}{n^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha \times \left(\frac{\ln(n^{\beta/\alpha})}{n^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha$

Nous savons que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$; ceci permet de conclure.

Notons $u_n = \frac{n^\beta}{\gamma^n}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\beta}{\gamma^{n+1}} \times \frac{\gamma^n}{n^\beta} = \frac{1}{\gamma} \times \left(\frac{n+1}{n} \right)^\beta$.

La suite de terme général $\frac{n+1}{n}$ converge vers 1, donc celle de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $k = \frac{1}{\gamma} < 1$.

La proposition 5.2 permet de conclure.

Noton $v_n = \frac{\gamma^n}{n!}$. Alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{\gamma^n} = \frac{\gamma}{n+1}$.

La suite de terme général $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ converge vers 0 : ici encore, nous pouvons conclure avec la proposition 5.2.

5.3 Relation «est équivalente à»

Définition : la suite (u_n) est *équivalente* à la suite (v_n) si la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1. Nous noterons $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$.

Proposition : la relation «est équivalente à» est réflexive, symétrique et transitive. Elle est compatible avec la multiplication.

Proposition : la suite (u_n) est *équivalente* à la suite (v_n) ssi $u_n - v_n = o(v_n)$.

Remarque : aucune suite ne peut-être équivalente à une suite nulle APCR. La relation d'équivalence des suites n'est pas compatible avec l'addition ; retenez le commandement suivant :

TU NE SOMMERAS POINT D'ÉQUIVALENTS !

5.4 Relation «est un grand \mathcal{O} de»

Définition : nous dirons que (u_n) est un grand \mathcal{O} de (v_n) si la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée. Nous noterons $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Exemples : n^2 est un \mathcal{O} de $5n^2$, n^3 , 2^n , $n!$, mais aussi de $\mathcal{O}(n^2/7)$. Si (u_n) converge, alors u_n est un $\mathcal{O}(1)$.

Proposition : si $u_n = \mathcal{O}(x_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(x_n)$, alors $u_n + v_n = \mathcal{O}(x_n)$. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$; même conclusion si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$.

6 Suites définies par l'itération d'une fonction

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction de I dans \mathbb{R} . Nous dirons que f est *itérable* si $f(I) \subset I$; dans ce cas, les fonctions $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, ... sont toutes définies sur I et à valeurs dans I . Nous pouvons définir l'image de $x \in I$ par la n -ième itérée de f : $f^{[0]}(x) = x$, et $f^{[n+1]}(x) = f^{[n]}(f(x))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : fixons $a > 0$. Définissons une suite (x_n) de réels strictement positifs par la donnée de $x_0 > 0$ (quelconque) et la relation $x_{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$. La suite de terme général x_n converge vers \sqrt{a} ; on peut montrer que la convergence est *quadratique*, c'est-à-dire : le nombre de décimales exactes est doublé à chaque itération. Cette méthode est effectivement mise en œuvre dans certaines bibliothèques de calcul numérique.

Nous nous intéressons maintenant aux suites (de réels ou de complexes) dont le terme général u_n vérifie $u_{n+1} = au_n + b$ (suites récurrentes linéaires du premier ordre) puis à celles dont le terme général $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (suites récurrentes linéaires du deuxième ordre).

6.1 Suites récurrentes linéaires du premier ordre

Soit (u_n) vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$. Le cas $a = 1$ est banal (suite arithmétique), de même que le cas $b = 0$ (suite géométrique). Nous supposons donc $a \neq 1$ et $b \neq 0$. Si une telle suite converge vers ℓ , alors $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \frac{b}{1-a}$. Notons alors $v_n = u_n - \ell$: la suite (v_n) vérifie $v_{n+1} = av_n$, elle est donc géométrique de raison a . La suite (u_n) converge vers ℓ ssi $|a| < 1$ ou $a = 1$.

6.2 Suites récurrentes linéaires du deuxième ordre

Notons $\mathcal{E}_{a,b}$ l'ensemble des suites (u_n) vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Remarquons que $\mathcal{E}_{a,b}$ n'est pas vide (il contient la suite nulle), et qu'il est stable pour l'addition des suites, ainsi que pour la multiplication d'une suite par un scalaire.

Commençons par exhiber des suites de terme général r^n appartenant à $\mathcal{E}_{a,b}$; nous aurons donc $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en particulier pour $n = 0$, ce qui nous donne $r^2 = ar + b$, qui est l'équation caractéristique associée à $\mathcal{E}_{a,b}$.

Si $\Delta = a^2 + 4b \neq 0$, alors l'équation possède deux solutions $r_1 = \frac{a-4\delta}{2}$ et $r_2 = \frac{a+4\delta}{2}$, où δ et $-\delta$ sont les racines carrées complexes de Δ . Compte tenu de ce qui a été signalé plus haut, la suite de terme général $\lambda(r_1)^n + \mu(r_2)^n$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$. Nous admettrons que tout élément de $\mathcal{E}_{a,b}$ est de cette forme.

Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$, alors l'équation possède une solution double $r = a/2$. La suite de terme général r^n appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$. Montrons qu'il en est de même de la suite de terme général $x_n = nr^n$. Notons que $b = -a^2/4$. Alors :

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= (n+2)r^{n+2} = (n+2)(ar^{n+1} + br^n) = (n+1)ar^{n+1} + nbr^n + ar^{n+1} + 2br^n \\ &= ax_{n+1} + bx_n + (ar+2b)r^n = ax_{n+1} + bx_n \end{aligned}$$

Ceci car $ar + 2b = a^2/2 - a^2/2 = 0$. À nouveau, nous admettrons que tout élément de $\mathcal{E}_{a,b}$ est de cette forme.

Exemple : la suite de FIBONACCI, de terme général F_n , est définie par la donnée de $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. L'équation caractéristique associée $r^2 = r + 1$ a pour solutions $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\varphi} = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. L'expression du terme général est $F_n = \frac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$.

Remarque : le choix adopté ici pour les deux premiers n'est pas le seul possible; certains auteurs préfèrent le choix $F_0 = F_1 = 1$, d'autres le choix $F_0 = 1$, $F_1 = 2$.

7 Trois exercices corrigés

7.1 La série harmonique alternée

Il s'agit de la suite de terme général $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. Nous montrons qu'elle converge vers $\ln(2)$.

Partons de la formule $1 - (-t)^{n+1} = (1+t) \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k t^k$, que nous écrivons $\frac{1}{1+t} = \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} + \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k t^k$.

Intégrons les deux membres sur $[0, 1]$, il vient : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{1+t} + \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \int_0^1 t^k dt$; en évaluant

l'intégrale du membre de gauche, et la somme du membre de droite, il vient $\ln(2) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{1+t} + \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ soit $S_n = \ln(2) + R_n$, où $R_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{1+t}$. Nous pouvons facilement encadrer $|R_n|$:

$$0 \leq |R_n| = \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{1+t} \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+1}$$

Nous en déduisons $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, puis $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(2)$.

7.2 Une suite croissante

Nous nous intéressons à la suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$. Il est clair que cette suite est croissante. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ ; alors, en passant à la limite dans les deux membres, nous obtenons $\ell = \ell + \ell^2$, donc $\ell = 0$; ce qui nous amène à une discussion selon la valeur de u_0 :

- si $u_0 > 0$, alors la suite diverge vers $+\infty$;
- si $u_0 < -1$, alors $u_1 > 0$, même conclusion que pour le cas précédent
- si $u_0 = 0$, la suite est constante;
- si $u_0 = -1$, alors $u_1 = 0$, donc la suite est stationnaire;
- il reste le cas $-1 < u_0 < 0$; remarquons que, si $-1 < x < 0$, alors $x + x^2 > -1$ clairement; et $x + x^2 = x(1 + x) < 0$; une récurrence immédiate nous montre alors que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $] -1, 0[$. En particulier, notre suite, qui est croissante, est majorée par 0 et donc converge vers 0.

7.3 Une suite définie implicitement

Nous nous intéressons à la suite dont le terme général x_n est l'unique solution sur \mathbb{R} de l'équation $\exp(-x) = nx$. Commençons par prouver l'existence et l'unicité de x_n : la fonction $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto nx - e^{-x}$ est définie, continue et strictement croissante sur \mathbb{R} . Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ sur $] \lim_{-\infty} f_n, \lim_{+\infty} f_n[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Observons au passage que $f_n(0) = -1$, donc $x_n > 0$.

L'équation dont x_n est solution peut s'écrire $x_n = \frac{e^{-x_n}}{n}$; comme $x_n > 0$, nous en déduisons l'encadrement $0 < x_n < \frac{1}{n}$, qui permet de conclure: la suite (x_n) converge vers 0.

Montrons (en prime) que la suite (x_n) est décroissante. $f_{n+1}(x_n) = (n+1)x_n - \exp(-x_n) = nx_n - \exp(-x_n) + x_n = f_n(x_n) + x_n = x_n > 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante, nous en déduisons $x_n > x_{n+1}$, donc la suite (x_n) est strictement décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

FIN