Q1 Soient A, B, C et D quatre points du plan ou de l'espace. Montrez la formule

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$$

Donnez une interprétation géométrique de cette relation, dans le cas du plan, puis dans le cas de l'espace.

Q2 Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. Montrez la formule

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

Q3 Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Établissez la *formule du double produit vectoriel* :

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

Vous pourrez proposer plusieurs méthodes.

Q4 Utilisez la formule du double produit vectoriel pour simplifier $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d)$. Constatez que deux expressions sont possibles, et déduisez-en une preuve de l'affirmation suivante : « quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont toujours liés ».

Q5 Soient a, b, c et d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Établissez la formule :

$$(a \wedge b) \cdot (c \wedge d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & b \cdot c \\ a \cdot d & b \cdot d \end{vmatrix}$$

Q6 Soient a, b et c trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donnez des expression simples des quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
q_1 &= \mathrm{m}\,(a+b, b+c, c+a) \\
q_2 &= \mathrm{m}\,(a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a) \\
q_3 &= \mathrm{m}\,((a+b) \wedge (a+c), (b+c) \wedge (b+a), (c+a) \wedge (c+b)) \\
q_4 &= \mathrm{m}\,((a \wedge b) \wedge (a \wedge c), (b \wedge c) \wedge (b \wedge a), (c \wedge a) \wedge (c \wedge b)) \\
q_5 &= \mathrm{m}\,((a \wedge b) + (a \wedge c), (b \wedge c) + (b \wedge a), (c \wedge a) + (c \wedge b))
\end{aligned}$$

Q7 Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Supposons A antisymétrique. Montrez qu'il existe un et un seul vecteur $a \in E$ tel que $f(x) = a \wedge x$ pour tout $x \in E$. Nous dirons que a est *associé* à A. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3, antisymétriques, et a, b leurs vecteurs associés. Vérifiez que $AB - BA$ est antisymétrique, et déterminez son vecteur associé.

► Un endomorphisme f d'un espace euclidien E est *antisymétrique* s'il vérifie $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot f(\vec{v})$ quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E.

Q8 Soit $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$. Prouvez que $\overrightarrow{x} \mapsto \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{a}$ est un endomorphisme antisymétrique ; déterminez son noyau et son image, puis résoudre l'équation $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Q9 Soit $a \in \mathbb{R}^3$. Étudiez l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Source : TPE 1992.

Q10 Soit $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire. Étudiez la fonction $f : x \mapsto x + (x \cdot u)u + \sqrt{3}(x \wedge u)$. Source : POX (RMS 1989.5.24)

Petit problème (Aleph TCE, Géométrie II, 6.14)

Q1 Soit f une rotation de $\mathbb{R}^3$; montrez que $f(u) \wedge f(v) = u \wedge v$ quels que soient u et v.

Q2 Que se passe-t-il si f est orthogonal mais n'est pas une rotation ?

► Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ distinct de $\mathbf{0}$ et vérifiant $g(u) \wedge g(v) = u \wedge v$ quels que soient u et v. Soit (i, j, k) une b.o.n.d. de $\mathbb{R}^3$

Q3 Que pouvez-vous dire de la famille $\big(g(i), g(j), g(k)\big)$?

Q4 Conclusion concernant g ?