

Énoncé

- On rappelle la relation $m(u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w$ définissant le produit vectoriel, ainsi que la formule du double produit vectoriel $(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$.
- Soient a, b et c trois vecteurs de \mathbb{R}^3 . Donnez des expressions simples des quantités suivantes :
 - $q_1 = m(a + b, b + c, c + a)$;
 - $q_2 = m(a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a)$;
 - $q_3 = m((a + b) \wedge (a + c), (b + c) \wedge (b + a), (c + a) \wedge (c + b))$;
 - $q_4 = m((a \wedge b) \wedge (a \wedge c), (b \wedge c) \wedge (b \wedge a), (c \wedge a) \wedge (c \wedge b))$;
 - $q_5 = m((a \wedge b) + (a \wedge c), (b \wedge c) + (b \wedge a), (c \wedge a) + (c \wedge b))$.

Solution

- q1** • Par multilinéarité, nous obtenons :

$$q_1 = m(a, b, c) + m(a, b, a) + m(a, c, c) + m(a, c, a) + m(b, b, c) + m(b, b, a) + m(b, c, c) + m(b, c, a)$$

Dans le membre de droite, six termes disparaissent par alternance. Il reste $q_1 = m(a, b, c) + m(b, c, a)$, soit $q_1 = 2m(a, b, c)$.

- Autre méthode : on ne change pas le produit mixte en ajoutant à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

$$\begin{aligned} q_1 &= m(2(a + b + c), b + c, c + a) = 2m(a + b + c, b + c, c + a) = 2m(a + b + c, -a, -b) \\ &= 2m(a + b + c, a, b) = 2m(a, b, c) \end{aligned}$$

- q2** • Par définition, $q_2 = ((a \wedge b) \wedge (b \wedge c)) \cdot (c \wedge a)$. Appliquons la formule du double produit vectoriel avec $u = a, v = b$ et $w = b \wedge c$; il vient :

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \wedge (b \wedge c) &= (u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u = (a \cdot (b \wedge c))b - (b \cdot (b \wedge c))a \\ &= m(a, b, c)b - m(b, b, c)a = m(a, b, c)b \end{aligned}$$

Reportons ce résultat : $q_2 = m(a, b, c)b \cdot (c \wedge a) = m(a, b, c)m(b, c, a) = (m(a, b, c))^2$.

- q3** • Notons $u = a + b, v = b + c$ et $w = c + a$ et utilisons l'alternance du produit mixte :

$$\begin{aligned} q_3 &= m(u \wedge v, v \wedge u, w \wedge v) = m(-(w \wedge u), -(u \wedge v), -(v \wedge w)) \\ &= -m(w \wedge u, u \wedge v, v \wedge w) = -m(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u) \end{aligned}$$

Avec le résultat de la question précédente, $q_3 = -(m(u, v, w))^2 = -(m(a + b, b + c, c + a))^2$. Avec l'expression de q_1 , il vient $q_3 = -4(m(a, b, c))^2$.

- q4** • Notons $u = a \wedge b, v = b \wedge c$ et $w = c \wedge a$. En utilisant l'antisymétrie du produit vectoriel et l'expression de q_2 , nous obtenons :

$$q_4 = m(u \wedge (-w), v \wedge (-u), w \wedge (-v)) = m(w \wedge u, u \wedge v, v \wedge w) = m(w, u, v)^2 = m(u, v, w)^2$$

En utilisant une deuxième fois l'expression de q_2 , il vient $q_4 = (m(a, b, c))^4$.

- Autre méthode : la formule du double produit vectoriel donne $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = (a \cdot (a \wedge c))b - (b \cdot (a \wedge c))a = m(a, b, c)a$; par raison de symétrie, $(b \wedge c) \wedge (b \wedge a) = m(b, c, a)b = m(a, b, c)b$ et $(c \wedge a) \wedge (c \wedge b) = m(c, a, b)c = m(a, b, c)c$. Par trilinearité, nous obtenons $q_4 = (m(a, b, c))^3 m(a, b, c) \dots$

- q5** • Notons $u = a \wedge b, v = b \wedge c$ et $w = c \wedge a$. En utilisant l'antisymétrie du produit vectoriel, nous obtenons $q_5 = m(u - w, v - u, w - v)$; mais les vecteurs $u - w, v - u$ et $w - v$ sont liés (leur somme est nulle). Donc $q_5 = 0$.

- Autre méthode : ajoutons $a \wedge a$ au premier facteur, $b \wedge b$ au deuxième et $c \wedge c$ au troisième. Il vient $q_5 = m(a \wedge (a + b + c), b \wedge (a + b + c), c \wedge (a + b + c))$. Si $a + b + c = \vec{0}$, alors $q_5 = 0$ banalement ; sinon, les trois vecteurs qui interviennent dans le produit mixte sont dans le plan orthogonal à $a + b + c$, donc sont liés si bien que $q_5 = 0$.