Fonction ≪partie entière≫

Définition : la *partie entière inférieure* du réel x est le plus grand relatif inférieur ou égal à x ; elle est notée $\lfloor x \rfloor$. Nous avons donc :

$$k = \lfloor x \rfloor \iff k \in Z \text{ et } k \leqslant x < k+1$$

Exemple — Nous avons $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -e \rfloor = -3$ et $\lfloor 666 \rfloor = 666$.

Proposition : la fonction ≪partie entière≫ est croissante.

Preuve : soient x et y deux réels, avec $x \leqslant y$. Notons $p = \lfloor x \rfloor$ et $q = \lfloor y \rfloor$. Alors $p \leqslant x$, donc $p \leqslant y$. Ainsi, p est *un* relatif majoré par y, tandis que q est *le plus grand* relatif majoré par y. Donc $p \leqslant q$.

Proposition : soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Nous avons $\lfloor x + k \rfloor = k + \lfloor x \rfloor$.

Preuve : notons $p = \lfloor x \rfloor$; alors $p \in \mathbb{Z}$ et $p \leqslant x < p + 1$; donc $p + k \in \mathbb{Z}$ et $p + k \leqslant x + k < p + k + 1$. Ceci montre que $p + k$ est la partie entière de $x + k$.

On trouve dans la littérature francophone les notations $E(x)$ et $[x]$ pour désigner la partie entière de x.

Nous définissons de façon semblable la *partie entière supérieure* d'un réel x : c'est le plus petit relatif supérieur ou égal à x. Il est noté $\lceil x \rceil$, et est défini par :

$$k = \lceil x \rceil \iff k \in Z \text{ et } k - 1 < x \leqslant k$$

Notons que $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ sont égaux ssi $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice — Trouver une relation simple entre $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil -x \rceil$.