Matrices

Table des matières

▶ $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbf{0}$ désigne la matrice nulle ou l'endomorphisme nul, selon le contexte.

▶ Tout résultat énoncé à propos de $\mathbb{K}^n$ s'applique à tout $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n.

1 Matrices : définition

1.1 Définition des matrices

Définition : soient n et p deux naturels non nuls. Une *matrice* à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un tableau à n lignes et p colonnes, dont chaque case contient un élément de $\mathbb{K}$; voici par exemple une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients dans $\mathbb{C}$: $A = \begin{pmatrix} 1+i & -2i & 0 \\ 2+3i & 7 & 5-2i \end{pmatrix}$

Une telle matrice peut aussi être vue comme une fonction de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. Le coefficient situé ligne i et colonne j est noté $A_{i,j}$. L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Une matrice A est *carrée* si $n = p$; l'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soient $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{U}$. Au vecteur $\mathbf{x}$, nous associons la matrice $X(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition : $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$. La matrice A de la famille $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{U}$ est la matrice à n lignes et p colonnes, définie comme suit : la j-ième colonne de A donne les coordonnées de $\mathbf{v}_j$ dans la base $\mathcal{U}$. Nous aurons donc $\mathbf{v}_j = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} A_{i,j} \mathbf{u}_i$.

Définition : Le *rang* de la matrice A est le rang de la famille des vecteurs-colonnes de A ; ce rang est donc majoré par p (nombre de colonnes) et par n (dimension de l'espace dans lequel sont ces vecteurs).

1.3 Matrice d'une application linéaire

Définition : soient $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une base de $\mathbb{K}^p$, $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et g une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. La matrice de g, relativement aux bases $\mathcal{U}$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{V}$ de $\mathbb{K}^n$ est la matrice dans $\mathcal{V}$ de la famille $g(\mathcal{U}) = \big(g(\mathbf{u}_j)\big)_{1 \leqslant j \leqslant p}$; nous la noterons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)$. La j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)$ donne les coordonnées de $g(\mathbf{u}_j)$ dans la base $\mathcal{V}$.

Proposition : Le rang de A est égal au rang de g.

Preuve : Le rang de A est le rang de la famille des vecteurs-colonnes de A ; or cette famille engendre l'image de g, donc son rang est celui de g.

Proposition : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le rang de $A \times B$ est au plus égal à $\min\big(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\big)$.

Preuve : Notons g (resp. h) l'application linéaire de $\mathbb{K}^q$ dans $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$) représentée par A (resp. B) dans les bases canoniques de ces $\mathbb{K}$-e.v. : alors (cf. le cours d'algèbre linéaire) $\mathrm{rg}(A \times B) = \mathrm{rg}(h \circ g) \leqslant \min\big(\mathrm{rg}(h), \mathrm{rg}(g)\big) = \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\big)$.

2 Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème — $\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \bullet\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

$\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \bullet\big)$ est donc de dimension np. La *base canonique* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille de matrices $(\Omega_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ où $\Omega_{i,j}$ et la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé ligne i, colonne j, qui est égal à 1. Nous aurons donc $(\Omega_{i,j})_{\ell,k} = \delta_{i,\ell} \times \delta_{j,k}$.

3 Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3.1 Produit matriciel

Définition : soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit $A \times B$ est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par $C_{i,k} = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} A_{i,j} B_{j,k}$.

On vérifie facilement que ce produit n'est ni commutatif, ni intègre : $\Omega_{1,1} \times \Omega_{1,2} = \Omega_{1,2}$, et $\Omega_{1,2} \times \Omega_{1,1} = \mathbf{0}$. Nous prouverons plus loin qu'il est associatif, en un sens qui sera précisé.

Théorème — Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ des bases respectives de $\mathbb{K}^q$, $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$; $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ et $h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(h \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(h) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)$.

Preuve : notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(h)$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(h \circ g)$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^q$ de coordonnées $(x_k)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ dans la base $\mathcal{U}$; notons $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$, et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{V}$; de même, notons $\mathbf{z} = (h \circ g)(\mathbf{x})$, et $(z_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{W}$. Alors

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = g\Bigg(\sum_{1 \leqslant i \leqslant q} x_i \mathbf{u}_i\Bigg) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} x_i g(\mathbf{u}_i) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} x_i \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} A_{i,j} \mathbf{v}_j = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \Bigg(\sum_{1 \leqslant i \leqslant q} A_{i,j} x_i\Bigg) \mathbf{v}_j$$

Donc $y_j = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant q} A_{i,j} x_i$. Un calcul analogue nous donne $\mathbf{z} = h(\mathbf{y}) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \Bigg(\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} B_{j,k} y_j\Bigg) \mathbf{w}_k$, et donc $z_k = \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} y_j B_{j,k}$. D'où :

$$z_k = \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} B_{j,k} \Bigg(\sum_{1 \leqslant i \leqslant q} x_i A_{i,j}\Bigg) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} A_{i,j} B_{j,k} x_k = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} C_{i,k} x_k$$

La dernière égalité obtenue vaut quel que soit le vecteur $\mathbf{x} = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant q} \in \mathbb{K}^q$, donc $C_{i,k} = \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} A_{i,j} B_{j,k}$. Mais ceci vaut quels que soient i et k : donc $C = B \times A$, ce qui est le résultat attendu.

Proposition : le produit matriciel est associatif, au sens suivant : soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$; alors $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

Preuve : soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ et $\mathcal{X}$ des bases respectives de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^p$, $\mathbb{K}^q$ et $\mathbb{K}^r$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, $h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ et $k \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^r)$ définis par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g) = A$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(h) = B$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{W},\mathcal{X}}(h) = C$. La composition des applications est associative, donc $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$; d'où $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

3.2 L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème — $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times\big)$ est un anneau, qui est commutatif et intègre ssi $n = 1$.

Preuve : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

3.3 Le groupe $\mathrm{G}L_n(\mathbb{K})$

Définition : une matrice A carrée d'ordre n est *inversible* s'il existe une matrice carrée B d'ordre n vérifiant $A \times B = B \times A = I_n$.

Nous noterons $\mathrm{G}L_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Théorème — $\big(\mathrm{G}L_n(\mathbb{K}), \times\big)$ est un groupe isomorphe à $\mathrm{G}L(\mathbb{K}^n)$. il est commutatif ssi $n = 1$.

Preuve : $\mathrm{G}L_n(\mathbb{K})$ est stable pour le produit matriciel ; il contient la matrice identité I_n ; il est stable pour le passage à l'inverse.

4 Transposition des matrices

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; on appelle *transposée* de A la matrice à p lignes et n colonnes, notée A^T et définie par $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$, pour tout couple $(i,j), \in, [\![1,p]\!] \times [1,n]$.

Proposition : $\tau : A \mapsto A^T$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$; lorsque $n = p$, τ est un automorphisme involutif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition : si le produit AB a un sens, alors $(AB)^T = B^T A^T$.

Définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *symétrique* lorsque $A^T = A$, *anti-symétrique* lorsque $A^T = -A$. Clairement, l'ensemble $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n symétriques, et l'ensemble $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{K})$ des matrices anti-symétriques sont deux s.e.v. supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition : une base simple de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{K})$ est obtenue en juxtaposant les familles $(\Omega_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\Omega_{i,j}+\Omega_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$. Une base simple de $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{K})$ est la famille $(\Omega_{i,j}-\Omega_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$. Les dimensions respectives de $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Asym}_n(\mathbb{K})$ sont $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Preuve : la rédaction est laissée aux bons soins du lecteur consciencieux !

Exercice — τ est un automrphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculez sa trace.

5 Matrices de passage

Définition : soient $\mathcal{U}=(\mathbf{u}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathcal{V}=(\mathbf{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux bases de $\mathbb{K}^n$. La *matrice de passage* de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{V}$, notée $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$, est la matrice de la famille $\mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{U}$. La j-ième colonne de cette matrice contient donc les composantes de $\mathbf{v}_j$ dans la base $\mathcal{U}$; donc $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est aussi la matrice de l'endomorphisme identique de $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{V}$ comme base de départ et $\mathcal{U}$ comme base d'arrivée.

Proposition : $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{W}}=\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\times\mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$.

Preuve : $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\times\mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{W}}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{id}_E)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_E)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\mathrm{id}_E)=\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{W}}$.

Remarque : il est clair que $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{U}}=\mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{V}}=I_n$. En remplaçant $\mathcal{W}$ par $\mathcal{U}$ dans la formule que nous venons d'établir, il vient $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\times\mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}=I_n$, soit $\left(\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\right)^{-1}=\mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}$.

Exemple : à toute permutation s de $[\![1,n]\!]$, nous pouvons associer la matrice P_s définie par $(P_s)_{i,j}=\delta_{i,s(j)}$. Dans la base canonique $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$, P_s représente l'endomorphisme f_s défini par $f_s(e_i)=e_{s(i)}$. On vérifie aisément que $(P_s)^{-1}={P_s}^T$.

Proposition : Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux bases de $\mathbb{K}^n$. Si $\mathbf{x}\in\mathbb{K}^n$ a pour coordonnées $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans la base $\mathcal{U}$, et $Y=(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans la base $\mathcal{V}$, alors $X=\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\times Y$.

Preuve : notons $A=\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$; $\vec{x}=\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{u}_i=\sum_{j=1}^n y_j\mathbf{v}_j$; mais $\mathbf{v}_j=\sum_{i=1}^n A_{i,j}\mathbf{u}_i$ donc $\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{u}_i=\sum_{j=1}^n y_j\Big(\sum_{i=1}^n A_{i,j}\mathbf{u}_i\Big)=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n y_jA_{i,j}\mathbf{u}_i=\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n A_{i,j}y_j\Big)\mathbf{u}_i$; l'unicité des composantes dans la base $\mathcal{U}$ permet d'affirmer que $x_i=\sum_{j=1}^n A_{i,j}y_j$, et ce, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, soit $X=A\times Y$.

Théorème — soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ des bases de $\mathbb{K}^p$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ des bases de $\mathbb{K}^n$ et $g\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$. Notons $P=\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}$, $Q=\mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$, $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)$ et $B=\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(g)$. Alors $B=Q^{-1}\times A\times P$.

Preuve : $g=g\circ\mathrm{id}_E$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}'}(g)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(g)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}(\mathrm{id}_E)=B\times\mathcal{P}_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}=B\times P^{-1}$. Mais nous pouvons aussi écrire $g=\mathrm{id}_F\circ g$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}'}(g)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{id}_F)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)=\mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}\times A=Q^{-1}\times A$. Ainsi $B\times P^{-1}=Q^{-1}\times A$, donc $B=Q^{-1}\times A\times P$.

6 Matrices équivalentes

Définition : soient A et B éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A et B sont *équivalentes* si elles représentent un même homomorphisme g de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, A dans des bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, B dans des bases $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{V}'$.

Théorème — A et B sont équivalentes ssi il existe $P\in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q\in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B=Q^{-1}AP$.

Preuve : pour le sens direct, prendre $P=P_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}$ et $Q=P_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$. Pour la réciproque : fixons des bases $\mathcal{U}$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{V}$ de $\mathbb{K}^n$ (par exemple les bases canoniques de ces deux espaces). Soient $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{V}'$ définies par $P=P_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}$ et $Q=P_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$; l'homomorphisme g représenté par A dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est alors représenté dans $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{V}'$ par $Q^{-1}AP=A$ ce qui prouve que A et B sont équivalentes.

Proposition : sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la relation «être équivalente à» est réflexive, symétrique et transitive.

Proposition : deux matrices équivalentes ont même rang.

Preuve : c'est le rang de l'homomorphisme g qu'elles représentent dans des bases adéquates.

Théorème — Soit $g\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$, de rang r. Il existe une base $\mathcal{U}$ de $\mathbb{K}^p$ et une base $\mathcal{V}$ de $\mathbb{K}^n$ telles que $g(\mathbf{u}_i)=\mathbf{v}_i$ pour $1\leqslant i\leqslant r$ et $g(\mathbf{u}_i)=0$ pour $r+1\leqslant i\leqslant n$.

Preuve : $\mathrm{im}(g)$ est un s.e.v. de dimension r de $\mathbb{K}^n$. Soit $(\mathbf{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ une base de $\mathrm{im}(g)$, que l'on complète par $(\mathbf{v}_i)_{r+1\leqslant i\leqslant n}$ pour obtenir une base $\mathcal{U}$ de $\mathbb{K}^n$. Pour chaque $i\in[\![1,r]\!]$, soit $\mathbf{u}_i$ tel que $g(\mathbf{u}_i)=\mathbf{v}_i$. La famille $(\mathbf{u}_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est libre puisque son image par g est libre. le s.e.v. H de $\mathbb{K}^p$ engendré par cette famille est de dimension r. H et $\ker(g)$ sont en somme directe : si $\mathbf{w} \in H \cap \ker(g)$, alors $g(\mathbf{w}) = 0$ et $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{u}_i$ donc $g(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i$; la famille $(\mathbf{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est libre, donc les λ_i sont tous nuls, donc $\mathbf{w} = 0$. Le théorème du rang indique que $\dim\bigl(\ker(g)\bigr) = \dim(\mathbb{K}^p) - \dim\bigl(\mathrm{im}(g)\bigr) = p - r$. Donc H et $\ker(g)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^p$. Il suffit alors de compléter $(\mathbf{u}_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ par une base $(\mathbf{u}_i)_{r+1 \leqslant i \leqslant p}$ pour avoir une base $(\mathbf{u}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ répondant à la question.

Théorème — Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est de rang r ssi elle est équivalente à la matrice $J^{<n,p,r>}$ définie comme suit : ${J^{<n,p,r>}}_{i,i} = 1$ si $1 \leqslant i \leqslant r$, et les autres coefficients sont tous nuls. Donnons l'écriture par blocs : $J^{<n,p,r>} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,p-r} \end{array}\right)$.

Preuve : soit A de rang r. Le théorème précédent affirme l'existence d'une base $\mathcal{U}$ de $\mathbb{K}^p$ et d'une base $\mathcal{V}$ de $\mathbb{K}^n$ telles que $g(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $g(\mathbf{u}_i) = 0$ pour $r+1 \leqslant i \leqslant n$. Dans ces bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, g est représenté par $J^{<n,p,r>}$, à laquelle A est donc équivalente. Réciproquement, $J^{<n,p,r>}$ est clairement de rang r, donc toute matrice équivalente à $J^{<n,p,r>}$ est aussi de rang r.

Proposition : deux matrices de même rang sont équivalentes.

Preuve : si r est leur rang commun, elles sont toutes deux équivalentes à $J^{<n,p,r>}$.

Remarque : dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le nombre de classes d'équivalence pour la relation «être équivalent à», est $\min(n, p) + 1$.

Théorème — A et A^T ont même rang.

Preuve : soit r le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; A est donc équivalente à $J^{<n,p,r>}$: $A = Q^{-1} J^{<n,p,r>} P$, soit $A^T = P^T (J^{<n,p,r>})^T \bigl(Q^{-1}\bigr)^T = P^T J^{<p,n,r>} \bigl(Q^T\bigr)^{-1}$; ainsi, A^T, équivalente à $J^{<p,n,r>}$, est également de rang r.

7 Caractérisations des matrices inversibles

Théorème — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

1. A est inversible ;
2. g est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$;
3. A possède une inverse à droite ;
4. A possède une inverse à gauche ;
5. $\mathrm{rg}(A) = n$;
6. $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$, c'est-à-dire : pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, $AX = 0$ implique $X = 0$.

Preuve : (1) $\iff$ (2) parce que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ sont isomorphes. (1) implique banalement (3), (4), (5) et (6). (5) implique $\mathrm{rg}(g) = n$, donc g est automorphisme de $\mathbb{K}^n$, donc (2) ; (6) implique $\ker(g) = \{\vec{0}\}$, donc (2) ; (3) implique (1) : si A possède une inverse à droite B, alors $A \times B = I_n$, donc $\mathrm{rg}(A) = n$, d'où (1) ; par raison de symétrie, (4) implique (1).

8 Algorithmique du calcul matriciel

8.1 Matrices triangulaires, diagonales, scalaires

Définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si les coefficients situés sous la diagonale sont tous nuls : $1 \leqslant i < j \leqslant n \Rightarrow A_{i,j} = 0$. A est *triangulaire inférieure* si A^T est triangulaire supérieure ;

Proposition : L'ensemble $\mathcal{MTS}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures est un $\mathbb{K} - e.v.$ et un anneau.

Preuve : le seul point à établir est la stabilité pour le produit matriciel. Soient A et B appartenant à $\mathcal{MTS}_n(\mathbb{K})$, et i, j deux indices vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$; alors $(A \times B)_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_{i,k} B_{k,j} = 0$; si $i < k$, alors $A_{i,k} = 0$; sinon $i \geqslant k$, donc $j > k$ et par suite $B_{k,j} = 0$. Donc tous les termes de la somme sont nuls.

Définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure est *à diagonale unité* si les coefficients situés sous la diagonale sont tous nuls, et si de plus les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

Proposition : L'ensemble des matrices triangulaires supérieures à diagonale unité est stable pour le produit matriciel.

Preuve : Soient A et B triangulaires supérieures à diagonale unité. Il suffit de prouver que les coefficients diagonaux de $A \times B$ sont tous égaux à 1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$; $A_{i,k} = 0$ si $i > k$ et $B_{k,i} = 0$ si $i < k$, donc $(A \times B)_{i,i} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A_{i,k} B_{k,i} = A_{i,i} B_{i,i} = 1$.

Définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si les coefficients situés hors de la diagonale sont tous nuls.

Proposition : L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est un s.e.v. et un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *scalaire* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Proposition : L'ensemble des matrices scalaires d'ordre n est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, c'est un corps isomorphe à $\mathbb{K}$.

8.2 Opérations élémentaires sur les lignes

Lemme 1 : permuter deux lignes L_i et L_j ne change pas le rang. Notons $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.

Lemme 2 : multiplier une ligne L_i par $\alpha \neq 0$ ne change pas le rang. Notons $L_i \leftarrow \alpha L_i$ cette opération.

Lemme 3 : ajouter à une ligne L_i une autre ligne L_j multipliée par un scalaire α ne change pas le rang. Notons $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ cette opération.

Les opérations homologues sur les colonnes seront notées $\mathcal{C}_i \leftrightarrow \mathcal{C}_j$, $\mathcal{C}_i \leftarrow \alpha \mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_i \leftarrow \mathcal{C}_i + \alpha \mathcal{C}_j$ respectivement.

8.3 Interprétation matricielle des opérations sur les lignes

Dans toute cette partie, nous noterons A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

8.3.1 Opération $L_i \leftrightarrow L_j$

Proposition : appliquer l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ revient à multiplier A à gauche par la matrice $P_{i,j} = I_n - \Omega_{i,i} - \Omega_{j,j} + \Omega_{i,j} + \Omega_{j,i}$.

Preuve : notons B la matrice déduite de A par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$. Alors $B_{i,k} = A_{j,k}$, $B_{j,k} = A_{i,k}$ et $B_{\ell,k} = A_{\ell,k}$ pour ℓ distinct de i et j. Par ailleurs, $(P_{i,j}A)_{i,k} = \sum\limits_{1 \leqslant q \leqslant n} (P_{i,j})_{i,q} A_{q,k}$. Les $(P_{i,j})_{i,q}$ sont tous nuls, à l'exception de $(P_{i,j})_{i,j} = 1$, donc $(P_{i,j}A)_{i,k} = A_{j,k}$. Ainsi, la i-ième ligne de B est égale à la j-ième ligne de A ; par raison de symétrie, la j-ième ligne de B est égale à la i-ième ligne de A. Si ℓ est distinct de i et j, alors $(P_{i,j}A)_{\ell,k} = \sum\limits_{1 \leqslant q \leqslant n} (P_{i,j})_{\ell,q} A_{q,k} = A_{\ell,k}$ car les $(P_{i,j})_{\ell,q}$ sont tous nuls, à l'exception de $(P_{i,j})_{\ell,\ell} = 1$. Donc les lignes ℓ de A et B sont égales.

Vérifions ceci sur l'exemple, avec $i = 2$ et $j = 3$:

$$P_{i,j} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

8.3.2 Opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$

Proposition : appliquer l'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (où $\alpha \neq 0$) à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ revient à multiplier A à gauche par la matrice $D_{i,\alpha} = I_n + (\alpha - 1)\Omega_{i,i}$.

Notons que cette opération n'a d'intérêt que si $\alpha \neq 1$.

Preuve : notons B la matrice déduite de A par l'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$. Alors $B_{i,k} = \alpha A_{i,k}$ et $B_{\ell,k} = A_{\ell,k}$ pour ℓ distinct de i. Par ailleurs, $(D_{i,\alpha}A)_{i,k} = \sum\limits_{1 \leqslant q \leqslant n} (D_{i,\alpha})_{i,q} A_{q,k}$. Les $(D_{i,\alpha})_{i,q}$ sont tous nuls, à l'exception de $(D_{i,\alpha})_{i,j} = \alpha$, donc $(D_{i,\alpha}A)_{i,k} = \alpha A_{i,k}$. Ainsi, la i-ième ligne de B est égale à α fois la j-ième ligne de A. Si ℓ

est distinct de i, alors $(D_{i,\alpha}A)_{\ell,k} = \sum_{1\leqslant q\leqslant n} (D_{i,\alpha})_{\ell,q}A_{q,k} = A_{\ell,k}$ car les $(D_{i,\alpha})_{\ell,q}$ sont tous nuls, à l'exception de $(D_{i,\alpha})_{\ell,\ell} = 1$. Donc les lignes ℓ de A et B sont égales.

Vérifions ceci sur l'exemple, avec $i = 2$ et $\alpha = 7$:

$$D_{i,\alpha} \times A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ -5 & 1 & 4\\ 7 & -3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ -35 & 7 & 28\\ 7 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

8.3.3 Opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

Proposition : appliquer l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ revient à multiplier A à gauche par la matrice $T_{i,j,\alpha} = I_n + \alpha\Omega_{i,j}$.

Notons que cette opération n'a d'intérêt que si $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$.

Preuve : notons B la matrice déduite de A par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. Alors $B_{i,k} = A_{i,k} + \alpha A_{j,k}$ et $B_{\ell,k} = A_{\ell,k}$ pour ℓ distinct de i. Par ailleurs, $(T_{i,j,\alpha}A)_{i,k} = \sum_{1\leqslant q\leqslant n} (T_{i,j,\alpha})_{i,q}A_{q,k}$. Les $(T_{i,j,\alpha})_{i,q}$ sont tous nuls, à l'exception de $(T_{i,j,\alpha})_{i,i} = 1$ et $(T_{i,j,\alpha})_{i,j} = \alpha$, donc $(T_{i,j,\alpha}A)_{i,k} = A_{i,k} + \alpha A_{j,k}$. Ainsi, la i-ième ligne de B est égale à la somme de la i-ième ligne de A et du produit par α de la j-ième ligne de A. Si ℓ est distinct de i, alors $(T_{i,j,\alpha}A)_{\ell,k} = \sum_{1\leqslant q\leqslant n} (T_{i,j,\alpha})_{\ell,q}A_{q,k} = A_{\ell,k}$ car les $(T_{i,j,\alpha})_{\ell,q}$ sont tous nuls, à l'exception de $(T_{i,j,\alpha})_{\ell,\ell} = 1$. Donc les lignes ℓ de A et B sont égales.

Vérifions ceci sur l'exemple, avec $i = 2$, $j = 3$ et $\alpha = 4$:

$$T_{i,j,\alpha} \times A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ -5 & 1 & 4\\ 7 & -3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ 23 & -11 & 12\\ 7 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

8.4 Algorithme de Gauss pour le calcul du rang

Soit $A^{(0)} = A$ la (n, p)-matrice dont nous voulons déterminer le rang. Nous pouvons supposer $A \neq \mathbf{0}$ (sinon il n'y a rien à faire) et $n \geqslant p$ quitte à travailler sur A^T. Nous allons construire une suite $A^{(1)}, \dots, A^{(r)}$ de matrices équivalentes (car de même rang), telles que : (1) la sous-matrice carrée d'ordre k située «en haut et à gauche» de $A^{(k)}$ est inversible ; (2) les $A_{i,j}$ avec $k+1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant k$ sont nuls. L'indice maximal r des termes de cette suite sera le rang de A.

Construction de $A^{(1)}$: quitte à permuter deux lignes et/ou deux colonnes de $A^{(0)}$, nous pouvons nous ramener au cas où $A^{(1)}_{1,1} \neq 0$. Pour chaque $i \in [\![2, n]\!]$, effectuons sur la $i-$ième ligne l'opération $L_i \leftarrow L_i - \alpha_i L_1$ où α_i est choisi pour annuler A_{i1}.

Construction de $A^{(k+1)}$ à partir de $A^{(k)}$: si les lignes $k+1$ à n de $A^{(k)}$ sont nulles, nous ne pouvons pas continuer : $r = k$ puisqu'il y a au plus k lignes indépendantes, et que l'hypothèse «$A^{(k)}$ est construite» implique qu'elle est de rang k.

Sinon, quitte à permuter deux lignes (d'indices compris entre $k+1$ et n) et/ou deux colonnes (d'indices compris entre $k+1$ et p) nous pouvons nous ramener au cas où $A^{(k)}_{k+1,k+1} \neq 0$, sans changer la sous-matrice carrée d'ordre k située «en haut et à gauche». Les $A^{(k)}_{i,j}$ pour $k+1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant k$ étaient nuls avant cette permutation, ils le sont encoreet après.

Pour chaque $i \in [\![k+2, n]\!]$, effectuo,s sur la $i-$ième ligne l'opération $L_i \leftarrow L_i - \alpha_i L_{k+1}$ où α_i est choisi pour annuler $A^{(k)}_{i,k+1}$. Maintenant, la matrice $A^{(k+1)}$ vérifie : (1) la sous-matrice carrée d'ordre $k+1$ située «en haut et à gauche» est inversible (car triangulaire supérieure, et sans zéros sur sa diagonale) ; (2) les $A_{i,j}$ pour $k+2 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant k+1$ sont nuls.

Remarque : on peut utiliser le lemme 2 pour faire apparaître des 1 sur la diagonale de la sous-matrice carrée inversible... Dans certains cas, ce peut être agréable.

8.5 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice à inverser.

Nous appliquons à la matrice $(A|I_n)$ une suite d'opérations élémentaires nous menant à une matrice $(I_n|B)$. Notons Q le produit des matrices élémentaires mises en jeu : $I_n = Q \times A$ et $B = Q \times I_n$, donc $B = A^{-1}$.

Si la matrice A n'est pas inversible, l'algorithme s'arrête avant la fin «normale» de son déroulement.

9 Trace d'une matrice (hors programme)

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on appelle *trace* de A, et on note $\mathrm{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$.

Proposition : la fonction $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{tr}(A)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve : tr est la somme des n formes linéaires $\Omega^*_{i,i} : A \mapsto A_{i,i}$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Proposition : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Preuve : $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1} \sum_{j=1} A_{i,j} B_{j,i} = \sum_{j=1} \sum_{i=1} A_{i,j} B_{j,i} = \sum_{j=1} \sum_{i=1} B_{j,i} A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{i,i} = \mathrm{tr}(BA)$.

Conséquence : si $B = P^{-1}AP$ alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$. En effet : $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}\big(P^{-1}(AP)\big) = \mathrm{tr}\big((AP)P^{-1}\big) = \mathrm{tr}(AI_n) = \mathrm{tr}(A)$. Nous en déduisons que trace de la matrice d'un endomorphisme g de $\mathbb{K}^n$ ne dépend pas de la base dans laquelle on la calcule.

Exemple : $\mathrm{tr}(Id_n) = n$. Si u est un projecteur, alors $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$; en effet, en juxtaposant dans cet ordre une base de $\mathrm{im}(u)$ et une base de $\ker(u)$, on obtient une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de u est $J^{<n,n,r>} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,n-r} \end{array}\right)$.

FIN