

Matrices

Table des matières

1	Matrices : définition	2
1.1	Définition des matrices	2
1.2	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base	2
1.3	Matrice d'une application linéaire	2
2	Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	2
3	Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	2
3.1	Produit matriciel	2
3.2	L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	3
3.3	Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$	3
4	Transposition des matrices	3
5	Matrices de passage	4
6	Matrices équivalentes	4
7	Caractérisations des matrices inversibles	5
8	Algorithmique du calcul matriciel	5
8.1	Matrices triangulaires, diagonales, scalaires	5
8.2	Opérations élémentaires sur les lignes	6
8.3	Interprétation matricielle des opérations sur les lignes	6
8.3.1	Opération $L_i \leftrightarrow L_j$	6
8.3.2	Opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$	6
8.3.3	Opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	7
8.4	Algorithme de GAUSS pour le calcul du rang	7
8.5	Calcul de l'inverse d'une matrice carrée	7
9	Trace d'une matrice (hors programme)	8

- \mathbb{K} désigne l'un des corps \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} . $\mathbf{0}$ désigne la matrice nulle ou l'endomorphisme nul, selon le contexte.
- Tout résultat énoncé à propos de \mathbb{K}^n s'applique à tout \mathbb{K} -e.v. de dimension n .

1 Matrices : définition

1.1 Définition des matrices

Définition : soient n et p deux naturels non nuls. Une *matrice* à n lignes et p colonnes, à coefficients dans \mathbb{K} , est un tableau à n lignes et p colonnes, dont chaque case contient un élément de \mathbb{K} ; voici par exemple une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, à coefficients dans \mathbb{C} : $A = \begin{pmatrix} 1+i & -2i & 0 \\ 2+3i & 7 & 5-2i \end{pmatrix}$

Une telle matrice peut aussi être vue comme une fonction de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ dans \mathbb{K} . Le coefficient situé ligne i et colonne j est noté $A_{i,j}$. L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Une matrice A est *carrée* si $n = p$; l'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soient $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de \mathbb{K}^n et $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Notons (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de \mathbf{x} dans \mathcal{U} . Au vecteur \mathbf{x} , nous associons la matrice $X(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition : $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de \mathbb{K}^p et $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_j)_{1 \leq j \leq n}$ une famille de p vecteurs de \mathbb{K}^n . La matrice A de la famille \mathcal{V} dans la base \mathcal{U} est la matrice à n lignes et p colonnes, définie comme suit : la j -ième colonne de A donne les coordonnées de \mathbf{v}_j dans la base \mathcal{U} . Nous aurons donc $\mathbf{v}_j = \sum_{1 \leq i \leq n} A_{i,j} \mathbf{u}_i$.

Définition : Le *rang* de la matrice A est le rang de la famille des vecteurs-colonnes de A ; ce rang est donc majoré par p (nombre de colonnes) et par n (dimension de l'espace dans lequel sont ces vecteurs).

1.3 Matrice d'une application linéaire

Définition : soient $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base de \mathbb{K}^p , $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de \mathbb{K}^n et g une application linéaire de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n . La matrice de g , relativement aux bases \mathcal{U} de \mathbb{K}^p et \mathcal{V} de \mathbb{K}^n est la matrice dans \mathcal{V} de la famille $g(\mathcal{U}) = (g(\mathbf{u}_j))_{1 \leq j \leq p}$; nous la noterons $\text{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)$. La j -ième colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)$ donne les coordonnées de $g(\mathbf{u}_j)$ dans la base \mathcal{V} .

Proposition : Le rang de A est égal au rang de g .

Preuve : Le rang de A est le rang de la famille des vecteurs-colonnes de A ; or cette famille engendre l'image de g , donc son rang est celui de g .

Proposition : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le rang de $A \times B$ est au plus égal à $\min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$.

Preuve : Notons g (resp. h) l'application linéaire de \mathbb{K}^q dans \mathbb{K}^p (resp. \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n) représentée par A (resp. B) dans les bases canoniques de ces \mathbb{K} -e.v. : alors (cf. le cours d'algèbre linéaire) $\text{rg}(A \times B) = \text{rg}(h \circ g) \leq \min(\text{rg}(h), \text{rg}(g)) = \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$.

2 Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème — $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \bullet)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \bullet)$ est donc de dimension np . La *base canonique* de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille de matrices $(\Omega_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où $\Omega_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé ligne i , colonne j , qui est égal à 1. Nous aurons donc $(\Omega_{i,j})_{\ell,k} = \delta_{i,\ell} \times \delta_{j,k}$.

3 Structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3.1 Produit matriciel

Définition : soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit $A \times B$ est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par $C_{i,k} = \sum_{1 \leq j \leq p} A_{i,j} B_{j,k}$.

On vérifie facilement que ce produit n'est ni commutatif, ni intègre : $\Omega_{1,1} \times \Omega_{1,2} = \Omega_{1,2}$, et $\Omega_{1,2} \times \Omega_{1,1} = \mathbf{0}$. Nous prouverons plus loin qu'il est associatif, en un sens qui sera précisé.

Théorème — Soient \mathcal{U} , \mathcal{V} et \mathcal{W} des bases respectives de \mathbb{K}^q , \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n ; $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ et $h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{W}}(h \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(h) \times \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(g)$.

Preuve : notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(g)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(h)$ et $C = \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{W}}(h \circ g)$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^q$ de coordonnées $(x_i)_{1 \leq i \leq q}$ dans la base \mathcal{U} ; notons $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$, et $(y_j)_{1 \leq j \leq p}$ ses coordonnées dans la base \mathcal{V} ; de même, notons $\mathbf{z} = (h \circ g)(\mathbf{x})$, et $(z_k)_{1 \leq k \leq n}$ ses coordonnées dans la base \mathcal{W} . Alors

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = g\left(\sum_{1 \leq i \leq q} x_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq q} x_i g(\mathbf{u}_i) = \sum_{1 \leq i \leq q} x_i \sum_{1 \leq j \leq p} A_{i,j} \mathbf{v}_j = \sum_{1 \leq j \leq p} \left(\sum_{1 \leq i \leq q} A_{i,j} x_i\right) \mathbf{v}_j$$

Donc $y_j = \sum_{1 \leq i \leq q} A_{i,j} x_i$. Un calcul analogue nous donne $\mathbf{z} = h(\mathbf{y}) = \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq p} B_{j,k} y_j\right) \mathbf{w}_k$, et donc $z_k = \sum_{1 \leq j \leq p} y_j B_{j,k}$. D'où :

$$z_k = \sum_{1 \leq j \leq p} B_{j,k} \left(\sum_{1 \leq i \leq q} x_i A_{i,j}\right) = \sum_{1 \leq i \leq q} \sum_{1 \leq j \leq p} A_{i,j} B_{j,k} x_i = \sum_{1 \leq i \leq q} C_{i,k} x_i$$

La dernière égalité obtenue vaut quel que soit le vecteur $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq q} \in \mathbb{K}^q$, donc $C_{i,k} = \sum_{1 \leq j \leq p} A_{i,j} B_{j,k}$. Mais

ceci vaut quels que soient i et k : donc $C = B \times A$, ce qui est le résultat attendu.

Proposition : le produit matriciel est associatif, au sens suivant : soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$; alors $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

Preuve : soient \mathcal{U} , \mathcal{V} , \mathcal{W} et \mathcal{X} des bases respectives de \mathbb{K}^n , \mathbb{K}^p , \mathbb{K}^q et \mathbb{K}^r , $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, $h \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ et $k \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^r)$ définis par $\text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(g) = A$, $\text{Mat}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(h) = B$ et $\text{Mat}_{\mathcal{W}, \mathcal{X}}(k) = C$. La composition des applications est associative, donc $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$; d'où $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

3.2 L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème — $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, qui est commutatif et intègre ssi $n = 1$.

Preuve : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

3.3 Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$

Définition : une matrice A carrée d'ordre n est *inversible* s'il existe une matrice carrée B d'ordre n vérifiant $A \times B = B \times A = I_n$.

Nous noterons $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans \mathbb{K} .

Théorème — $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe isomorphe à $GL(\mathbb{K}^n)$. il est commutatif ssi $n = 1$.

Preuve : $GL_n(\mathbb{K})$ est stable pour le produit matriciel ; il contient la matrice identité I_n ; il est stable pour le passage à l'inverse.

4 Transposition des matrices

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; on appelle *transposée* de A la matrice à p lignes et n colonnes, notée A^T et définie par $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$.

Proposition : $\tau : A \mapsto A^T$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$; lorsque $n = p$, τ est un automorphisme involutif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition : si le produit AB a un sens, alors $(AB)^T = B^T A^T$.

Définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *symétrique* lorsque $A^T = A$, *anti-symétrique* lorsque $A^T = -A$. Clairement, l'ensemble $\text{Sym}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n symétriques, et l'ensemble $\text{Asym}_n(\mathbb{K})$ des matrices anti-symétriques sont deux s.e.v. supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition : une base simple de $\text{Sym}_n(\mathbb{K})$ est obtenue en juxtaposant les familles $(\Omega_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ et $(\Omega_{i,j} + \Omega_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$. Une base simple de $\text{Asym}_n(\mathbb{K})$ est la famille $(\Omega_{i,j} - \Omega_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$. Les dimensions respectives de $\text{Sym}_n(\mathbb{K})$ et $\text{Asym}_n(\mathbb{K})$ sont $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Preuve : la rédaction est laissée aux bons soins du lecteur consciencieux !

Exercice — τ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculez sa trace.

5 Matrices de passage

Définition : soient $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux bases de \mathbb{K}^n . La *matrice de passage* de la base \mathcal{U} à la base \mathcal{V} , notée $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$, est la matrice de la famille \mathcal{V} dans la base \mathcal{U} . La j -ième colonne de cette matrice contient donc les composantes de \mathbf{v}_j dans la base \mathcal{U} ; donc $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est aussi la matrice de l'endomorphisme identique de \mathbb{K}^n avec \mathcal{V} comme base de départ et \mathcal{U} comme base d'arrivée.

Proposition : $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{W}} = \mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \times \mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$.

Preuve : $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \times \mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{W}} = \text{Mat}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\text{id}_E) \times \text{Mat}_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\text{id}_E) = \mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{W}}$.

Remarque : il est clair que $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{V}} = I_n$. En remplaçant \mathcal{W} par \mathcal{U} dans la formule que nous venons d'établir, il vient $\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \times \mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{U}} = I_n$, soit $(\mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}})^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{U}}$.

Exemple : à toute permutation s de $[[1, n]]$, nous pouvons associer la matrice P_s définie par $(P_s)_{i,j} = \delta_{i,s(j)}$. Dans la base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{K}^n , P_s représente l'endomorphisme f_s défini par $f_s(e_i) = e_{s(i)}$. On vérifie aisément que $(P_s)^{-1} = P_s^T$.

Proposition : Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} deux bases de \mathbb{K}^n . Si $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ a pour coordonnées $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans la base \mathcal{U} , et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans la base \mathcal{V} , alors $X = \mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \times Y$.

Preuve : notons $A = \mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$; $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{v}_j$; mais $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n A_{i,j} \mathbf{u}_i$ donc $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^n A_{i,j} \mathbf{u}_i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n y_j A_{i,j} \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j \right) \mathbf{u}_i$; l'unicité des composantes dans la base \mathcal{U} permet d'affirmer que $x_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} y_j$, et ce, pour tout $i \in [[1, n]]$, soit $X = A \times Y$.

Théorème — soient \mathcal{U} et \mathcal{U}' des bases de \mathbb{K}^p , \mathcal{V} et \mathcal{V}' des bases de \mathbb{K}^n et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Notons $P = \mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}$, $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(g)$. Alors $B = Q^{-1} \times A \times P$.

Preuve : $g = g \circ \text{id}_E$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}'}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}(\text{id}_E) = B \times \mathcal{P}_{\mathcal{U}',\mathcal{U}} = B \times P^{-1}$. Mais nous pouvons aussi écrire $g = \text{id}_F \circ g$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g) = \text{Mat}_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\text{id}_F) \times \text{Mat}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(g) = \mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{V}'} \times A = Q^{-1} \times A$. Ainsi $B \times P^{-1} = Q^{-1} \times A$, donc $B = Q^{-1} \times A \times P$.

6 Matrices équivalentes

Définition : soient A et B éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A et B sont *équivalentes* si elles représentent un même homomorphisme g de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n , A dans des bases \mathcal{U} et \mathcal{V} , B dans des bases \mathcal{U}' et \mathcal{V}' .

Théorème — A et B sont équivalentes ssi il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.

Preuve : pour le sens direct, prendre $P = \mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}$ et $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$. Pour la réciproque: fixons des bases \mathcal{U} de \mathbb{K}^p et \mathcal{V} de \mathbb{K}^n (par exemple les bases canoniques de ces deux espaces). Soient \mathcal{U}' et \mathcal{V}' définies par $P = \mathcal{P}_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}$ et $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}$; l'homomorphisme g représenté par A dans \mathcal{U} et \mathcal{V} est alors représenté dans \mathcal{U}' et \mathcal{V}' par $Q^{-1}AP = A$ ce qui prouve que A et B sont équivalentes.

Proposition : sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la relation «être équivalente à» est réflexive, symétrique et transitive.

Proposition : deux matrices équivalentes ont même rang.

Preuve : c'est le rang de l'homomorphisme g qu'elles représentent dans des bases adéquates.

Théorème — Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, de rang r . Il existe une base \mathcal{U} de \mathbb{K}^p et une base \mathcal{V} de \mathbb{K}^n telles que $g(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $g(\mathbf{u}_i) = 0$ pour $r+1 \leq i \leq p$.

Preuve : $\text{im}(g)$ est un s.e.v. de dimension r de \mathbb{K}^n . Soit $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq r}$ une base de $\text{im}(g)$, que l'on complète par $(\mathbf{v}_i)_{r+1 \leq i \leq n}$ pour obtenir une base \mathcal{V} de \mathbb{K}^n . Pour chaque $i \in [[1, r]]$, soit \mathbf{u}_i tel que $g(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$. La famille $(\mathbf{u}_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre puisque son image par g est libre. le s.e.v. H de \mathbb{K}^p engendré par cette famille est de

dimension r . H et $\ker(g)$ sont en somme directe : si $\mathbf{w} \in H \cap \ker(g)$, alors $g(\mathbf{w}) = 0$ et $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i$ donc

$g(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i$; la famille $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre, donc les λ_i sont tous nuls, donc $\mathbf{w} = 0$. Le théorème du rang

indique que $\dim(\ker(g)) = \dim(\mathbb{K}^p) - \dim(\text{im}(g)) = p - r$. Donc H et $\ker(g)$ sont supplémentaires dans \mathbb{K}^p . Il suffit alors de compléter $(\mathbf{u}_i)_{1 \leq i \leq r}$ par une base $(\mathbf{u}_i)_{r+1 \leq i \leq p}$ pour avoir une base $(\mathbf{u}_i)_{1 \leq i \leq p}$ répondant à la question.

Théorème — Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est de rang r ssi elle est équivalente à la matrice $J^{<n,p,r>}$ définie comme suit : $J^{<n,p,r>}_{i,i} = 1$ si $1 \leq i \leq r$, et les autres coefficients sont tous nuls. Donnons l'écriture par blocs :

$$J^{<n,p,r>} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r,p-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,p-r} \end{array} \right).$$

Preuve : soit A de rang r . Le théorème précédent affirme l'existence d'une base \mathcal{U} de \mathbb{K}^p et d'une base \mathcal{V} de \mathbb{K}^n telles que $g(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ pour $1 \leq i \leq r$ et $g(\mathbf{u}_i) = 0$ pour $r+1 \leq i \leq n$. Dans ces bases \mathcal{U} et \mathcal{V} , g est représenté par $J^{<n,p,r>}$, à laquelle A est donc équivalente. Réciproquement, $J^{<n,p,r>}$ est clairement de rang r , donc toute matrice équivalente à $J^{<n,p,r>}$ est aussi de rang r .

Proposition : deux matrices de même rang sont équivalentes.

Preuve : si r est leur rang commun, elles sont toutes deux équivalentes à $J^{<n,p,r>}$.

Remarque : dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le nombre de classes d'équivalence pour la relation «être équivalent à», est $\min(n,p) + 1$.

Théorème — A et A^T ont même rang.

Preuve : soit r le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; A est donc équivalente à $J^{<n,p,r>}$: $A = Q^{-1}J^{<n,p,r>}P$, soit $A^T = P^T(J^{<n,p,r>})^T(Q^{-1})^T = P^T J^{<p,n,r>}(Q^T)^{-1}$; ainsi, A^T , équivalente à $J^{<p,n,r>}$, est également de rang r .

7 Caractérisations des matrices inversibles

Théorème — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons g l'endomorphisme de \mathbb{K}^n dont A est la matrice dans la base canonique de \mathbb{K}^n . Les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

1. A est inversible ;
2. g est un automorphisme de \mathbb{K}^n ;
3. A possède une inverse à droite ;
4. A possède une inverse à gauche ;
5. $\text{rg}(A) = n$;
6. $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$, c'est-à-dire : pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, $AX = 0$ implique $X = 0$.

Preuve : (1) \iff (2) parce que $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL(\mathbb{K}^n)$ sont isomorphes. (1) implique banalement (3), (4), (5) et (6). (5) implique $\text{rg}(g) = n$, donc g est automorphisme de \mathbb{K}^n , donc (2); (6) implique $\ker(g) = \{\mathbf{0}\}$, donc (2); (3) implique (1) : si A possède une inverse à droite B , alors $A \times B = I_n$, donc $\text{rg}(A) = n$, d'où (1); par raison de symétrie, (4) implique (1).

8 Algorithmique du calcul matriciel

8.1 Matrices triangulaires, diagonales, scalaires

Définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si les coefficients situés sous la diagonale sont tous nuls : $1 \leq i < j \leq n \Rightarrow A_{i,j} = 0$. A est *triangulaire inférieure* si A^T est triangulaire supérieure ;

Proposition : L'ensemble $\mathcal{MTS}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures est un $\mathbb{K} - e.v.$ et un anneau.

Preuve : le seul point à établir est la stabilité pour le produit matriciel. Soient A et B appartenant à $\mathcal{MTS}_n(\mathbb{K})$, et i, j deux indices vérifiant $1 \leq i < j \leq n$; alors $(A \times B)_{i,j} = \sum_{1 \leq k \leq n} A_{i,k} B_{k,j} = 0$; si $i < k$, alors $A_{i,k} = 0$; sinon $i \geq k$, donc $j > k$ et par suite $B_{k,j} = 0$. Donc tous les termes de la somme sont nuls.

Définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure est à *diagonale unité* si les coefficients situés sous la diagonale sont tous nuls, et si de plus les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

Proposition : L'ensemble des matrices triangulaires supérieures à diagonale unité est stable pour le produit matriciel.

Preuve : Soient A et B triangulaires supérieures à diagonale unité. Il suffit de prouver que les coefficients diagonaux de $A \times B$ sont tous égaux à 1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$; $A_{i,k} = 0$ si $i > k$ et $B_{k,i} = 0$ si $i < k$, donc $(A \times B)_{i,i} = \sum_{1 \leq k \leq n} A_{i,k} B_{k,i} = A_{i,i} B_{i,i} = 1$.

Définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si les coefficients situés hors de la diagonale sont tous nuls.

Proposition : L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est un s.e.v. et un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *scalaire* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Proposition : L'ensemble des matrices scalaires d'ordre n est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, c'est un corps isomorphe à \mathbb{K} .

8.2 Opérations élémentaires sur les lignes

Lemme 1 : permuter deux lignes L_i et L_j ne change pas le rang. Notons $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.

Lemme 2 : multiplier une ligne L_i par $\alpha \neq 0$ ne change pas le rang. Notons $L_i \leftarrow \alpha L_i$ cette opération.

Lemme 3 : ajouter à une ligne L_i une autre ligne L_j multipliée par un scalaire α ne change pas le rang. Notons $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ cette opération.

Les opérations homologues sur les colonnes seront notées $\mathcal{C}_i \leftrightarrow \mathcal{C}_j$, $\mathcal{C}_i \leftarrow \alpha \mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_i \leftarrow \mathcal{C}_i + \alpha \mathcal{C}_j$ respectivement.

8.3 Interprétation matricielle des opérations sur les lignes

Dans toute cette partie, nous noterons A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

8.3.1 Opération $L_i \leftrightarrow L_j$

Proposition : appliquer l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ revient à multiplier A à gauche par la matrice $P_{i,j} = I_n - \Omega_{i,i} - \Omega_{j,j} + \Omega_{i,j} + \Omega_{j,i}$.

Preuve : notons B la matrice déduite de A par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$. Alors $B_{i,k} = A_{j,k}$, $B_{j,k} = A_{i,k}$ et $B_{\ell,k} = A_{\ell,k}$ pour ℓ distinct de i et j . Par ailleurs, $(P_{i,j}A)_{i,k} = \sum_{1 \leq q \leq n} (P_{i,j})_{i,q} A_{q,k}$. Les $(P_{i,j})_{i,q}$ sont tous nuls,

à l'exception de $(P_{i,j})_{i,i} = 1$, donc $(P_{i,j}A)_{i,k} = A_{j,k}$. Ainsi, la i -ième ligne de B est égale à la j -ième ligne de A ; par raison de symétrie, la j -ième ligne de B est égale à la i -ième ligne de A . Si ℓ est distinct de i et j , alors $(P_{i,j}A)_{\ell,k} = \sum_{1 \leq q \leq n} (P_{i,j})_{\ell,q} A_{q,k} = A_{\ell,k}$ car les $(P_{i,j})_{\ell,q}$ sont tous nuls, à l'exception de $(P_{i,j})_{\ell,\ell} = 1$. Donc les lignes ℓ de A et B sont égales.

Vérifions ceci sur l'exemple, avec $i = 2$ et $j = 3$:

$$P_{i,j} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & -3 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

8.3.2 Opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$

Proposition : appliquer l'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (où $\alpha \neq 0$) à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ revient à multiplier A à gauche par la matrice $D_{i,\alpha} = I_n + (\alpha - 1)\Omega_{i,i}$.

Notons que cette opération n'a d'intérêt que si $\alpha \neq 1$.

Preuve : notons B la matrice déduite de A par l'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$. Alors $B_{i,k} = \alpha A_{i,k}$ et $B_{\ell,k} = A_{\ell,k}$ pour ℓ distinct de i . Par ailleurs, $(D_{i,\alpha}A)_{i,k} = \sum_{1 \leq q \leq n} (D_{i,\alpha})_{i,q} A_{q,k}$. Les $(D_{i,\alpha})_{i,q}$ sont tous nuls, à l'exception de $(D_{i,\alpha})_{i,i} = \alpha$, donc $(D_{i,\alpha}A)_{i,k} = \alpha A_{i,k}$. Ainsi, la i -ième ligne de B est égale à α fois la i -ième ligne de A . Si ℓ

est distinct de i , alors $(D_{i,\alpha}A)_{\ell,k} = \sum_{1 \leq q \leq n} (D_{i,\alpha})_{\ell,q} A_{q,k} = A_{\ell,k}$ car les $(D_{i,\alpha})_{\ell,q}$ sont tous nuls, à l'exception de $(D_{i,\alpha})_{\ell,\ell} = 1$. Donc les lignes ℓ de A et B sont égales.

Vérifions ceci sur l'exemple, avec $i = 2$ et $\alpha = 7$:

$$D_{i,\alpha} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -35 & 7 & 28 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

8.3.3 Opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

Proposition: appliquer l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ revient à multiplier A à gauche par la matrice $T_{i,j,\alpha} = I_n + \alpha \Omega_{i,j}$.

Notons que cette opération n'a d'intérêt que si $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$.

Preuve: notons B la matrice déduite de A par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. Alors $B_{i,k} = A_{i,k} + \alpha A_{j,k}$ et $B_{\ell,k} = A_{\ell,k}$ pour ℓ distinct de i . Par ailleurs, $(T_{i,j,\alpha}A)_{i,k} = \sum_{1 \leq q \leq n} (T_{i,j,\alpha})_{i,q} A_{q,k}$. Les $(T_{i,j,\alpha})_{i,q}$ sont tous nuls, à

l'exception de $(T_{i,j,\alpha})_{i,i} = 1$ et $(T_{i,j,\alpha})_{i,j} = \alpha$, donc $(T_{i,j,\alpha}A)_{i,k} = A_{i,k} + \alpha A_{j,k}$. Ainsi, la i -ième ligne de B est égale à la somme de la i -ième ligne de A et du produit par α de la j -ième ligne de A . Si ℓ est distinct de i , alors $(T_{i,j,\alpha}A)_{\ell,k} = \sum_{1 \leq q \leq n} (T_{i,j,\alpha})_{\ell,q} A_{q,k} = A_{\ell,k}$ car les $(T_{i,j,\alpha})_{\ell,q}$ sont tous nuls, à l'exception de $(T_{i,j,\alpha})_{\ell,\ell} = 1$. Donc

les lignes ℓ de A et B sont égales.

Vérifions ceci sur l'exemple, avec $i = 2$, $j = 3$ et $\alpha = 4$:

$$T_{i,j,\alpha} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -5 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 23 & -11 & 12 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

8.4 Algorithme de Gauss pour le calcul du rang

Soit $A^{(0)} = A$ la (n, p) -matrice dont nous voulons déterminer le rang. Nous pouvons supposer $A \neq \mathbf{0}$ (sinon il n'y a rien à faire) et $n \geq p$ quitte à travailler sur A^T . Nous allons construire une suite $A^{(1)}, \dots, A^{(r)}$ de matrices équivalentes (car de même rang), telles que: (1) la sous-matrice carrée d'ordre k située «en haut et à gauche» de $A^{(k)}$ est inversible; (2) les $A_{i,j}$ avec $k+1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k$ sont nuls. L'indice maximal r des termes de cette suite sera le rang de A .

Construction de $A^{(1)}$: quitte à permuter deux lignes et/ou deux colonnes de $A^{(0)}$, nous pouvons nous ramener au cas où $A_{1,1}^{(1)} \neq 0$. Pour chaque $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, effectuons sur la i -ième ligne l'opération $L_i \leftarrow L_i - \alpha_i L_1$ où α_i est choisi pour annuler $A_{i,1}$.

Construction de $A^{(k+1)}$ à partir de $A^{(k)}$: si les lignes $k+1$ à n de $A^{(k)}$ sont nulles, nous ne pouvons pas continuer: $r = k$ puisqu'il y a au plus k lignes indépendantes, et que l'hypothèse « $A^{(k)}$ est construite» implique qu'elle est de rang k .

Sinon, quitte à permuter deux lignes (d'indices compris entre $k+1$ et n) et/ou deux colonnes (d'indices compris entre $k+1$ et p) nous pouvons nous ramener au cas où $A_{k+1,k+1}^{(k)} \neq 0$, sans changer la sous-matrice carrée d'ordre k située «en haut et à gauche». Les $A_{i,j}^{(k)}$ pour $k+1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k$ étaient nuls avant cette permutation, ils le sont encore et après.

Pour chaque $i \in \llbracket k+2, n \rrbracket$, effectuons sur la i -ième ligne l'opération $L_i \leftarrow L_i - \alpha_i L_{k+1}$ où α_i est choisi pour annuler $A_{i,k+1}^{(k)}$. Maintenant, la matrice $A^{(k+1)}$ vérifie: (1) la sous-matrice carrée d'ordre $k+1$ située «en haut et à gauche» est inversible (car triangulaire supérieure, et sans zéros sur sa diagonale); (2) les $A_{i,j}$ pour $k+2 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k+1$ sont nuls.

Remarque: on peut utiliser le lemme 2 pour faire apparaître des 1 sur la diagonale de la sous-matrice carrée inversible... Dans certains cas, ce peut être agréable.

8.5 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice à inverser.

Nous appliquons à la matrice $(A|I_n)$ une suite d'opérations élémentaires nous menant à une matrice $(I_n|B)$. Notons Q le produit des matrices élémentaires mises en jeu : $I_n = Q \times A$ et $B = Q \times I_n$, donc $B = A^{-1}$.
Si la matrice A n'est pas inversible, l'algorithme s'arrête avant la fin «normale» de son déroulement.

9 Trace d'une matrice (hors programme)

Définition : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on appelle *trace* de A , et on note $\text{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux de A : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$.

Proposition : la fonction $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \text{tr}(A)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve : tr est la somme des n formes linéaires $\Omega_{i,i}^* : A \mapsto A_{i,i}$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Proposition : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Preuve : $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} B_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{i,j} B_{j,i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n B_{j,i} A_{i,j} = \sum_{i=1}^n (BA)_{i,i} = \text{tr}(BA)$.

Conséquence : si $B = P^{-1}AP$ alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$. En effet : $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(AI_n) = \text{tr}(A)$. Nous en déduisons que trace de la matrice d'un endomorphisme g de \mathbb{K}^n ne dépend pas de la base dans laquelle on la calcule.

Exemple : $\text{tr}(Id_n) = n$. Si u est un projecteur, alors $\text{tr}(u) = \text{rg}(u)$; en effet, en juxtaposant dans cet ordre une base de $\text{im}(u)$ et une base de $\text{ker}(u)$, on obtient une base de \mathbb{K}^n dans laquelle la matrice de u est

$$J^{<n,n,r>} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,n-r} \end{array} \right).$$

FIN