

# Lois de composition

## Table des matières

### 1 Généralités

1

## 1 Généralités

**Définition :** une *loi de composition* sur un ensemble  $E$  est une fonction  $\varphi$  de  $E \times E$  dans  $E$ . Le *composé* de deux éléments  $a$  et  $b$  de  $E$  est  $\varphi(a, b)$ , que l'on note plutôt  $a \varphi b$ . L'expression *loi de composition* désigne en fait ce que l'on appelle usuellement *opération*.

**Exemples — :**

- l'addition, dans  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ;
- la multiplication, dans chacun de ces ensembles, mais aussi dans l'ensemble  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ;
- la composition des fonctions d'un ensemble  $E$  dans lui-même ;
- le produit vectoriel ;
- les fonctions min et max, dans  $\mathbb{R}$  ;
- les fonctions pgcd et ppcm, dans  $\mathbb{N}$  ;
- les lois  $\cup$  (union) et  $\cap$  (intersection) sur l'ensemble des parties de  $E$ .

**Définition :** une loi sur un ensemble  $E$  muni d'une loi  $\star$  est *associative* si elle vérifie  $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$  quels que soient  $a, b, c \in E$ .

**Exemples —**

- l'addition, la multiplication, la composition des fonctions sont associatives ;
- la soustraction, la division (dans  $\mathbb{R}^*$ ), le produit vectoriel ne le sont pas ; par exemple  $(9 - 7) - 4 = -2$  tandis que  $9 - (7 - 4) = 6$ .

**Remarque :** l'associativité est une propriété essentielle ; lorsqu'une loi  $\star$  est associative, on peut écrire  $a \star b \star c$  sans risque d'ambiguïté. Sinon, il faut faire la différence entre  $(a \star b) \star c$  et  $a \star (b \star c)$ .

**Définition :** une loi sur un ensemble  $E$  muni d'une loi  $\star$  est *commutative* si elle vérifie  $a \star b = b \star a$  quels que soient  $a, b \in E$ .

**Exemples —** l'addition, la multiplication (dans  $\mathbb{C}$ ) sont commutatives ; la composition des fonctions, le produit matriciel, la soustraction ne le sont pas.

**Définition :** soit  $E$  un ensemble muni d'une loi  $\star$  ; un élément  $e$  est le *neutre* de  $\star$  si  $a \star e = e \star a = a$  quel que soit  $a \in E$ .

**Exemples —**

- dans  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  le neutre de l'addition est 0 ;
- celui de la multiplication est 1 ;
- pour la loi  $\cup$  (union), le neutre est l'ensemble vide.

**Proposition :** le neutre, s'il existe, est unique

**Preuve :** par l'absurde : supposons qu'il existe un deuxième neutre  $e'$ . Alors  $e' = e \star e' = e$ .

**Définition :** un élément  $a$  de  $E$  est dit *régulier* (ou *simplifiable*) pour la loi  $\star$  si  $a \star x = a \star y$  implique  $x = y$ , et  $x \star a = y \star a$  implique  $x = y$ .

**Exemples —**

- dans  $\mathbb{Z}$ , tout élément est régulier pour  $+$  ;
- pour  $\times$ , seul 0 n'est pas régulier.

**Proposition** : si une loi  $\star$  est associative, alors le produit de deux éléments réguliers est régulier.

**Preuve** : soient  $a, b$  deux éléments réguliers, et  $x, y$  deux éléments quelconques de  $E$ . Alors :

$$(a \star b) \star x = (a \star b) \star y \Rightarrow a \star (b \star x) = a \star (b \star y) \Rightarrow b \star x = b \star y \Rightarrow x = y$$

**Définition** : un élément  $a$  de  $E$  est dit *symétrisable* pour la loi  $\star$  s'il existe un élément  $a'$  de  $E$  tel que  $a \star a' = a' \star a = e$ . Nous dirons alors que  $a'$  est la *symétrique* de  $a$ . Lorsque la loi est multiplicative, on utilise les termes *inversible* et *inverse*, et on note  $a^{-1}$  l'inverse de  $a$  ; lorsque la loi est additive, on utilise le terme *opposé*, et on note  $-a$  l'opposé de  $a$ .

**Proposition** : si la loi est associative, alors l'inverse de  $a$  est unique.

**Preuve** : supposons qu'il existe deux inverses  $a'$  et  $a''$  ; alors :  $a'' = a'' \star e = a'' \star (a \star a') = (a'' \star a) \star a' = e \star a' = a'$ .

**Proposition** : si la loi est associative, le produit de deux éléments inversibles est inversible ; de plus, l'inverse du produit est égal au produit des inverses *dans l'ordre inverse* :  $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$ .

**Preuve** : c'est une simple vérification :  $(b^{-1} \star a^{-1}) \star (a \star b) = b^{-1} \star (a^{-1} \star a) \star b = b^{-1} \star e \star b = b^{-1} \star b = e$ . On vérifierait de même que  $(a \star b) \star (b^{-1} \star a^{-1}) = e$ .

**Proposition** : tout élément inversible est régulier.

**Preuve** : soit  $a$  inversible ; alors :  $a \star x = a \star y \Rightarrow a^{-1} \star (a \star x) = a^{-1} \star (a \star y) \Rightarrow (a^{-1} \star a) \star x = (a^{-1} \star a) \star y \Rightarrow e \star x = e \star y \Rightarrow x = y$ .

**Remarque** : la réciproque est fautive : dans  $\mathbb{N}$ , un naturel  $n \geq 2$  est régulier, mais n'est pas inversible.

**Définition** : soient  $E$  un ensemble muni d'une loi  $\star$  et  $A$  une partie de  $E$ . Nous dirons que  $A$  est *stable* pour  $\star$  si  $a \star b \in A$  quels que soient  $a, b \in A$ .

**Exemples** —

- $E$  est stable pour sa loi ;
- si la loi possède un neutre  $e$ , alors  $\{e\}$  est stable pour la loi ;
- l'ensemble des éléments réguliers est stable pour la loi.

**Définition** : soient  $E$  un ensemble muni d'une loi  $\star$  et  $A$  une partie de  $E$  stable pour la loi  $\star$  ; alors la *loi induite* par  $\star$  sur  $A$  est définie comme suit :  $a \bar{\star} b = a \star b$ . C'est donc une fonction de  $A \times A$  dans  $A$ .

FIN